数学科授業案

教科で育みたい人間像　「論理的かつ客観的に解決にあたる人」

授業者　児玉　祐樹

１　日　時　　令和６年 11 月１日（金）　第２時　11：30～12：20
２　学　級　　２年Ｃ組　（２年Ｃ組教室）
３　題材名　　角の三等分線の作図は厳しいって！

４　本題材で願う学び

曲尺を用いた角の三等分線のかき方と出会い、その複雑なかき方から「本当に曲尺を使った方法で角の三等分線がかけたのか」という問いが生まれ、解明していく。どの情報を仮定として設定するのか、仮定としたい情報の真偽をどこまで追究するべきか、結論を確認しながら吟味し議論する中で、根拠を明確にすることや逆算的にものごとを考える必要性を実感する。

（学習指導要領との関連：B⑵図形の合同　イ㈠㈡）

５　これまでの学び

⑴ 判断の根拠となる基準によって考察が変わる

中学１年生の「データの活用」の学習では、人の周辺視野の広さに影響する関係因子を調べた。周辺視野の広さを表すデータは、**図１**のように 1～100 までの数字がランダムに配置されたマスから３分間で小さい順にいくつまで数えられたかを実験して取得した。また、周辺視野と関係しそうな項目はアンケート調査を行うことで集めた。

61	6	66	21	92	1	19	57	54	83
87	5	13	11	25	18	75	68	71	14
2	27	24	23	10	28	98	88	34	50
67	85	84	97	80	51	41	35	30	22
62	9	79	86	26	46	56	37	59	15
20	94	93	49	4	82	12	55	60	3
53	77	42	63	58	76	32	43	31	74
65	16	44	40	96	52	91	29	95	99
17	70	39	8	64	81	48	90	45	7
89	33	38	47	36	72	100	78	73	69

図１　タッチザナンバーズの実験用紙

周辺視野が広い人の傾向を、チームスポーツ経験の有無や動体視力の善し悪しなどと関連づけながら説明する中で「数えられた個数が 45 以上の人を見ると……」「動体視力がよい基準は……」など数字と動体視力の関係に注目する姿が見られた。しかし、なぜその数値に注目したのかや、「よい」と判断した根拠は何かまではふれていなかった。共有する時間で、それらを確認する中で、平均値や中央値といったどの代表値を基準にするかの違いや、データのばらつきを見て外れ値を考慮するかどうかなどで、データのとらえ方や考察の仕方が変わっていくという気づきを得たことがわかった。以上のことから、根拠となる基準は人によって異なり、データのどこに注目するかによって、データから考察される内容は変わってくることを学んでいたと考える。

⑵ 既知の事実を疑い理解を深める

中学２年生の「連立方程式」の学習では、単元の導入として鶴亀算の問題を扱った。**図２**のように、加減法の考えを共有すると、「式同士を引いてもよいのか」という疑問が出たため、連立方程式の加減法という解き方の仕組みについて考えた。子どもたちは、「両辺に等しいものを足したり引いたりしても等しい関係は保たれるから式同士は引いてもよい」と等式の性質を根拠として説明していた。また、加減法において式の意味や単位の異なる式でも計算してよいのかを考える場面では、式の係数に注目して「頭の式を２倍するのは、鳥が２倍いると仮定して考えている」と実際のシチュエーションと結びつけて説明できるととらえていた。計算の仕方は知っていたが、考え方や仕組みにまで目を向けることで、加減法の新たな一面にふれた。疑問を抱いたらそのままにせず解決したい問いとして考えたり、すでに知っていることを疑ったりすることで理解が深まることに気づいた。

$$
\begin{array}{rr}
 & 2x+2y=16 \\
-) & \underline{4x+2y=26} \\
 & -2x=-10 \\
 & x=5
\end{array}
$$

図２　連立方程式の加減法

⑶ 演繹的な論証との出会い

文字式を用いて整数の性質を説明する学習では、「７で割る以外に、３けたの自然数が７の倍数と判断する方法はあるのか」を問いとして授業を行った。子どもたちは、３けたの自然数が７の倍数であると判断する方法として、「百の位の数の２倍と十の位の数の３倍と一の位の数の和が７の倍数である」「百の位の数の２倍と下二桁の和が７の倍数であ

る」などの決まりを見つけだしていった。どちらも正しいが、前者は文字式を用いて、次のように説明することができる。

（説明例）
３けたの自然数の百の位の数をa、十の位の数をb、一の位の数をcとすると、３けたの自然数は

$$100a+10b+c$$

と表すことができる。また、

$$2a+3b+c=7m\ （m\text{は自然数}）★$$

とする。このとき、

$$\begin{aligned}100a+10b+c&=98a+2a+7b+3b+c\\&=98a+7b+2a+3b+c\\&=98a+7b+7m\\&=7(14a+b+m)\end{aligned}$$

となる。$14a+b+m$は整数であるので、$7(14a+b+m)$は７の倍数である。
以上のことから、百の位の数の２倍と十の位の数の３倍と一の位の数の和が７の倍数であれば、３けたの自然数は７の倍数である。

３けたの自然数の各位の数を文字でおき、説明例の★のように見つけた条件を文字式（$2a+3b+c=7m$、$2a+(10b+c)=7m$など）で表すことができた。しかし、７の倍数であることの説明をする際に、表した文字式をどのように用いればよいかまではわからないようだった。このことは、論証を進めていく上で、たどり着きたい結論とその根拠とする仮定とのすみ分けが明確になっていない姿であるといえる。

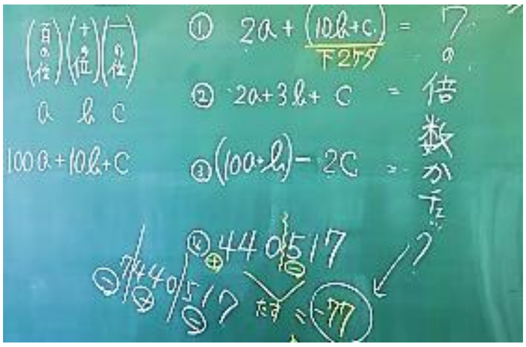


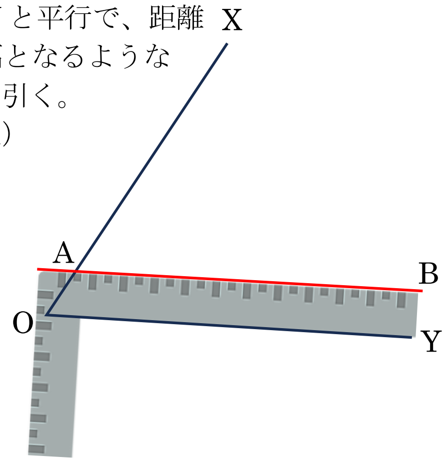
図３　板書の記録

数学的な推論をしていく場面は他の領域でも存在する。小学校や中学１年生でも帰納的・類推的に説明することはあるが、演繹的に説明する場面は主に中学２年生からである。特に上記の文字式を用いて整数の性質を説明する学習は、演繹的に説明することとの出会いとなり、仮定と結論の区別が明確になっていなければ、論証の流れが見えてこないことに気づく場面になったと考える。図形の証明の学習においても、仮定と結論を正しく見極めることを大切にして、授業を進めていきたい。

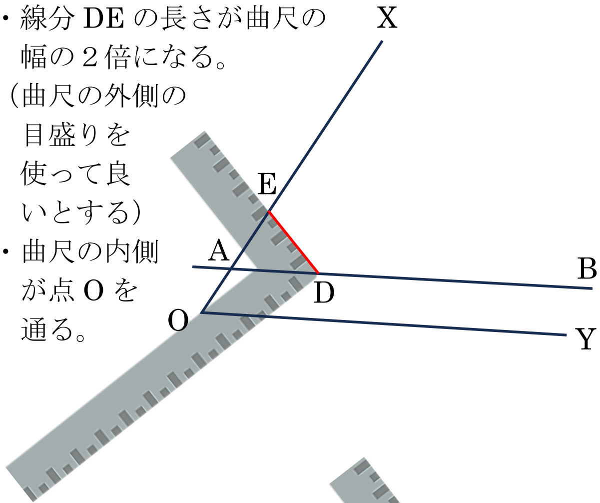
６　題材観

角の三等分線は作図できないとされているが、曲尺を用いるとかくことが可能になる。以下はかき方の手順である。

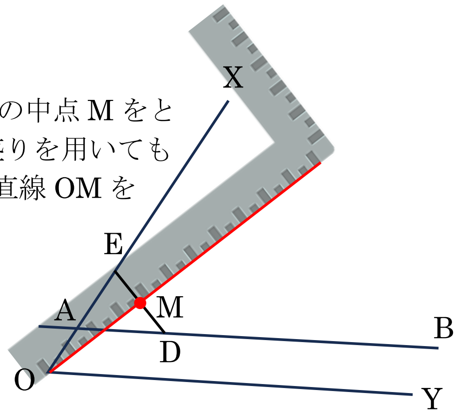
❶半直線 OY と平行で、距離が曲尺の幅となるような直線 AB を引く。（A は OX 上）



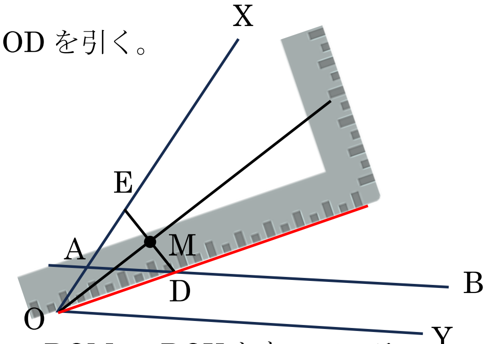
❷次の三つを満たすように線分 DE を引く。
・曲尺の外側の角 D が直線 AB 上になる。
・線分 DE の長さが曲尺の幅の２倍になる。（曲尺の外側の目盛りを使って良いとする）
・曲尺の内側が点 O を通る。



❸線分 DE の中点 M をとり、（目盛りを用いても良い）半直線 OM を引く。



❹半直線 OD を引く。



❺∠EOM＝∠DOM＝∠DOY となっている。

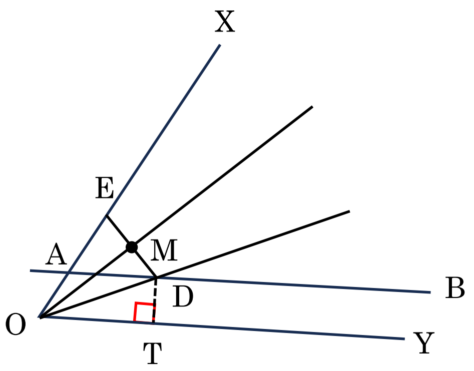
図４　曲尺を用いて角の三等分線をかく方法

この方法で角が三等分されていることは、次のように証明できる。

（証明例）
△ODMと△OEMにおいて、
共通な辺だから、
　OM＝OM・・・①
点Mは線分DEの中点だから、
　DM＝EM・・・②
曲尺の内側の長辺と外側の短辺の位置関係は垂直だから、
　∠OMD＝∠OME＝90°・・・③
①②③より、2組の辺とその間の角がそれぞれ等しいので、
　△ODM≡△OEM
合同な図形の対応する角の大きさは等しいので、
　∠DOM＝∠EOM・・・④

点Dから半直線OYに垂線を引き交点をTとする。
つまり∠OTD＝90°・・・⑤

△ODMと△ODTにおいて、
③⑤より、∠OMD＝∠OTD＝90°・・・⑥
共通な辺だから、
　OD＝OD・・・⑦
曲尺の幅の長さだから、
　DM＝DT・・・⑧
⑥⑦⑧より、直角三角形の斜辺と他の一辺がそれぞれ等しいので、
　△ODM≡△ODT
合同な図形の対応する角の大きさは等しいので、
　∠DOM＝∠DOT・・・⑨
④⑨より、∠EOM＝∠DOM＝∠DOT



(1) 本題材の価値

①逆算的思考を促す

中学生は図形の証明問題に取り組む際に、仮定が正しいかどうか判断したり、根拠としたい仮定を探したりする途中過程で、結論を見失い、何を証明したかったのかわからなくなることがある。

本題材でかかれた図形には、多くの情報が含まれており、ただ読み取れる情報をそのまま並べているだけでは、結論にたどり着くことは難しい題材である。そのため、「証明したいことは∠EOM＝∠DOM＝∠DOT だから、そのために△ODM≡△OEM や△ODM≡△ODT をそれぞれ証明すればよい。それらに必要な合同条件は……」と結論からも考えることで、必要な情報が精査されていく。このように、逆算的にものごとをとらえていく必要感を抱くところが本題材の価値だと考える。

②数学的根拠に迫るための対立構造

本題材の角の三等分線のかき方が正しいことを図形的に証明しようとすると、曲尺の見た目の直角の位置とずれているため、∠OMD＝∠OME＝90°という情報が仮定としてとらえにくい。そのため、本当に90°であるか、感覚的に正しいとする意見もあれば、道具の性質から図形の性質に落とし込んで数学的に説明するべきだという意見もあると考える。このような意見の差異が、自分と他人の証明文を比較する際に、同じ仮定を用いているがその根拠の示し方が違うという形で対立構造を生み出す。この対立する考えを生み出せることもこの題材の価値である。

対立するからこそ、互いの考えに寄り添い、数学的根拠をどこまで明確にするべきなのかを考えることで、必要な議論が巻き起こされていくだろう。また、議論する中で自分と他者の根拠を比較したり、他者の意見を取り入れたりすることを通して、自分の論証を客観的に見ることにもつながっていくと考える。

情報があふれかえっている現代では、人々はさまざまな問題に直面しながら生きている。問題を解決するためには、逆算的にものごとを考える力や、必要なものを見極めて正しく使う力が必要であると考える。本題材が、その力を養うきっかけとなると考えている。

(2) 本題材で願う子どもの姿

本題材で願う子どもの姿は以下の二つである。

一つめは、見つけた図形の性質が本当に正しいのか吟味する姿である。(1)①でも述べたように、本題材の証明では仮定としてとらえにくい情報がある。本当にその角度が直角だと断定してよいのか、感覚的に正しいと認める子どももいれば、理由を示さなければ正しいと認めてはいけないと考える子どももいるだろう。その子どもたちが意見を交えることで、角の大きさや辺の長さなどの情報を証明に用いる際にどこまで理由づけをするかを考え始めるだろう。そして、感覚的にとらえていた子どもも含めて、仮定を吟味し議論に参加していくと考える。

二つめは、図形から得られる情報が本題材の証明の仮定として用いることができるか見極める姿で

ある。図形から得られる情報は多くあり、補助線を引くことでも辺や角の数などの情報は増える。その中で、結論に迫るために子どもたちは「△ODM≡△OEM を示すには、どの合同条件を使うのか……、ということは DM＝EM を示せばよいのか」と逆算的に考えていくだろう。そして、証明したいことがらを再確認していく中で、使うべき情報に焦点が絞られ、仮定を見極めていくことを期待している。

予測が難しい現代だからこそ、起こるさまざまな問題を解決しながら生活しなければならない。その問題解決の場面では、論理的思考という数学的な見方・考え方が生かされると考える。また、一人で問題を解決することが難しい場面では、自分の考えをわかりやすく人に伝える力も大切になるだろう。本題材において、根拠を明確にした論証の進め方や逆算的なものごとの考え方を学び、問題に対して論理的かつ客観的に解決にあたる人に近づいていくことを願っている。

７　題材構想（全７時間）

(1) 余ったホールケーキを三等分しよう（１時間）
(2) 本当に∠XOY は三等分されたのか（５時間：本時はその４）
(3) 証明する中で学んだことをまとめよう（１時間）

本題材の問いを自分ごとにするために、体験的に角の三等分線は作図することができないことにふれてから、曲尺を使った角の三等分線のかき方とで出会う流れとする。その際、図をワークシートで示すが、考える対象を明確にすべく、底面のおうぎ形の弧を除いた角だけを記載したい。

曲尺を使った角の三等分線のかき方は複雑であるため、子どもたちは困り感をもつだろう。その際、授業者は再度かき方を実演したり、図形の注目すべき角を確認したりして、子どもたちの実態をとらえながら進めていきたい。

証明する段階では、子どもによって図形のとらえ方や注目している部分は異なるはずである。自分と異なる思考にふれ、気づきを得るためにも、授業の始めに前時までの考え方を共有していきたい。また、共有することで追究の手が止まっていた子どもにとっても考える方向性を定めるための手助けになるだろう。

本題材を通して「本当に」や「なぜ」などの問い直しを意識していきたい。自分一人の視点や仮定の根拠が明確ではない中で、見つけた図形の情報が不確実な内容であることは、なかなか自分だけでは気づきにくいだろう。また、「なぜ」という問い直しは、子どもたち同士でも行ってほしい。理由を追究する視点をもてるようになると、根拠を明確にしながら論証を進めることができるようになるだろう。今後、四角形の性質について学ぶ際にも本題材での学びを意識しながら論証に取り組んでほしい。

(1)　余ったホールケーキを三等分しよう（１時間）

興味を引くような題材との出会いとするために、余ったホールケーキを囲む人数を変えて撮影した以下のような写真を提示する（**図５、６**）。

図５　ケーキを２人で食べようとする

図６　ケーキを３人で食べようとする

写真を見た子どもたちから「３人の写真はうれしそうじゃない」という反応が出ると予想されるため「なぜうれしそうではないのだろうか」と聞き返す。すると「２人はケーキを分けやすいけど、３人は分けづらい」と、ケーキの等分の仕方を考え始めるだろう。さらに、その理由を聞いていくことで「２人ならケーキの中心角を半分に分ければいい」「ケーキの中心角を三等分するのは難しい」と底面のおうぎ形に注目し、平面図形としてとらえていく。そして、角の二等分線を作図で

きることを全体で簡単に確認してから、角を三等分することができるのか、ワークシート上で試みていく。子どもたちは作図の知識を用いて「角の二等分線を何回か作図すれば三等分できないかな」と試みるものの、三つの角の大きさが等しくなることはなく、苦戦するだろう。

そこで、曲尺を使ったかき方を紹介し、子どもたちもその方法で行ってみる。かき方に出会った子どもたちは、「途中からどうやって線を引いたのかわからなくなった」「本当にその方法で角が三等分されたのか」などと疑問を抱き、紙を折ったり分度器で測ったりしながら、分かれた三つの角度が等しいかどうかを確かめていくだろう。このように、曲尺を使った方法の複雑さや不確実性を感じるからこそ、「本当に曲尺を使った方法で角の三等分線がかけたのか」という問いが生まれる。それらを共有し、「本当に∠EOM＝∠DOM＝∠DOT といえるのだろうか」と結論を確認したうえで証明を進めていく。

(2) 本当に∠XOY は三等分されたのか

（５時間：本時はその４）

前時で生まれた問いからたどり着きたい結論を全体で確認し、明確にしたうえで証明を考え始めていく。∠EOM＝∠DOM＝∠DOT を示そうとする子どもたちは、以下のように図形をとらえたり、情報を取得したりしていくだろう。

（結論につながらない内容）
- △ODE が二等辺三角形といえるかな
- ∠ODM＝∠OEM といえるかな
- 半直線 OD の延長先に C をとり、平行線の同位角で、∠DOT＝∠CDB がいえる
- 平行線の錯角で、∠TOD＝∠ADO がいえる
- ED の延長線と OY の交点を F としたとき、△OEM≡△OMD≡△ODF となるかな

（結論につながる内容）
- △ODM≡△OEM がいえたらよい
- ∠OMD は直角になるだろう
- 点 D から OY に垂線 DT を引いたとき、△ODM≡△ODT がいえたらよい
- ∠OMD＝∠OTD＝90°、DM＝DT がいえる
- 中点をとったから、DM＝EM だ

このように、得られた情報には結論につながる内容もあればそうでないものもある。また、情報の根拠が不正確なものもあるだろう。そこで授業者が大切にしたいのは、「なぜ」と問うことである。自分の判断の理由を聞かれた子どもたちは「三角形の合同が示すことができたら対応する角が等しいといえるから」「確かに二等辺三角形とは断定できない」「曲尺の幅は一定だから DM＝DT としてよい」などと気づき、既習の図形の性質と結びつけたり図形から新たな情報を得たり探しだしたりして、考え直していくだろう。

また、問い直した内容は全体で共有していきたい。全体が同じポイントに注目することで、共通の話題となり議論が生まれていくだろう。特に、「本当に∠OMD＝∠OTD＝90°となるのか」という問い直しは全体で確認したい。この問いに対して子どもたちは「曲尺は直角に折れ曲がった定規だから、90°と認めてよい」「いや、曲尺に見えている直角は∠OMD の場所ではないから、本当に正しいかもっと理由が必要」などと語るだろう。その根拠に差があるからこそ、誰が見ても納得できるよりよい根拠を求めて話し合っていきたい。その中で、「垂直に交わる２直線の一方に平行な直線はもう一方の直線にも垂直になる」をもとに数学的根拠まで迫って確認していくだろう。

最後の１時間は、証明文を完成させていく時間としたい。これまでの学習で、結論に至るまでに必要な情報を集めてきたり、その情報が正しいといえる根拠を明確にしたりしてきたため、証明文を完成させることで全体像が見えてくるだろう。さらに、仮定と結論の関係性や結びつきが明らかになり、これまでの思考がつながる実感が得られるだろう。

(3) 証明する中で学んだことをまとめよう（１時間）

本題材を含めて、中学２年生の図形の学習では、証明の進め方を学び、二等辺三角形の性質や直角三角形の合同条件などを考えてきた。本題材の証明において、これまでの学びを活用する場面がたくさんあっただろう。そこで、図形の証明を進めるうえで大切だと思ったことや深く考えたこと、学んだことなどを最終追究としてまとめる。また、次の題材では四角形の性質に注目し、図形について学んでいく。そのため、根拠を明確にすることや結論に立ち返ることなど、本題材で大切にしてきたことを意識しながら今後の学習につなげていく。以下は本題材終了時に子どもたちが書くであろう最終追究の一例である。

（最終追究）
- 最初にやり方を聞いたときは、本当にその方法で角が三等分されるのか理解できなかったが、証明をしてみると、今までに学習した図形の性質を使って、確かに∠XOY が三等分されていることがわかった。
- かいた図形を見ていると、角や辺など等しくなりそうなところは見えてきた。しかし、本当に等しいのかすぐにわからないものもあった。仮定として使いたい情報が正しいかどうかの理由を、どこまで細かく書く必要があるのか考え

た。(自分なりの基準を書くことも予想される)
今後、同じように証明文を書くときにも、しっかり根拠を明確にしたい。
・証明するためには、どの三角形の合同が示せたらよいのかを考えた。しかし、「ここの角が等しい」と思ってもそれは結論にしたい内容で、仮定には使えないとなることがあった。だから、どの合同条件が使えそうで、そのためにどの角や辺が等しいかを考えるようになった。
・曲尺を使うと角の三等分線をかくことができるとわかったが、今回は鋭角について考えたので、鈍角でも同じように角を三等分することができるのかやってみたい（やってみたらできた)。また、それが本当に正しいのか、今回の証明のように考えたい。

論証するときに根拠を明確にすることの価値や逆算してものごとを考えることを、数学の学習だけでなく、日常生活やさまざまな問題解決の場面でも生かしていってほしいと願う。

参考文献：桑田勝矢・新濱光紀・馬場良始(2015)　『角の三等分問題-数学専門科目での実践-』
（数学教育研究 = Osaka Journal of Mathematics Education (46), 61-86)

文部科学省(2017)　『学習指導要領解説　数学編』

参考資料：日曜数学者　柚子(2023)　『角の三等分線は絶対できないの？』
（https://note.com/yuzu_mathlove/n/ncf7b495e64e6)

明治大学理学部数学科　阿部海登・押味　優・川杉正和・守法孝浩・山口絢子(2005)
『蔵野ゼミ卒業論文　角の三等分の作図が不可能であることを、高校生にもわかるように解説する試み』
（https://www.isc.meiji.ac.jp/~kurano/soturon/ronbun/05kurano.pdf)