実践事例３

１　題材名　コピー機の性質に迫ろう　（第３学年）

２　題材観

(1) 無理数の誕生

①無理数の歴史

古代ギリシャ人は，直線について次のように考えていたといわれている。

『世の中には究極の単位の「点」(最小だが大きさがある)があり，それがつながって直線となる。その線を顕微鏡で見ていくと，きっとツブツブの点が数珠つなぎにたくさん並んでおり，いくつあるかも数えられるはず。そして，その「数の違いが長さの違い」である。』

しかし，すぐにこの考えは「無理数」という存在によって見事に否定されてしまった。「無理数」の存在でおきた矛盾とは,『世の中に「究極のツブ」があるのなら，そのツブの 数の比が長さになる。つまり２本の線分の比は常に「自然数：自然数」となるはずである。しかし，無理数は「自然数の比」では表わせない。』ということである。

例えば，長さ１ｃｍの中にある「究極のツブ」の個数をｎ個とすると，長さ３ｃｍ(整数) の中のツブの個数は３ｎ個, 比で表わすと１：３となる。長さ 3.5ｃｍつまり (7/2)ｃｍ(有理数)の場合は，ツブの個数は(7/2)ｎ個になるが，ツブは究極に小さいツブにできるので，ｎを２の倍数にすると，(7/2)ｎも自然数となり，比も自然数の比となる。しかし，長さ√2ｃｍ(無理数)の場合は，底辺と高さが１ｃｍで底角 45°の直角三角形の斜辺の長さなので，ツブを並べて表せるはずだが，この場合ツブの個数は√2ｎ個と無理数となり，√2ｎはｎをいくつにしても自然数とならないため，矛盾が生じたのである。

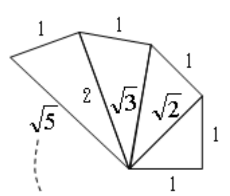
当時，三平方の定理を見つけたピタゴラス派では，この矛盾を見つけてからは，無理数は「あってはならない数」とされ，絶対に他言は無用としたのだが，それを外部にもらしたために仲間内で処刑されたものまでいたといわれている。

②無理数の作図

図１のように，底辺が√(ｎ－1)，高さ１の直角三角形から，無理数√ｎの長さを次々と作図し，無理数が数直線上にとれることを実感する。

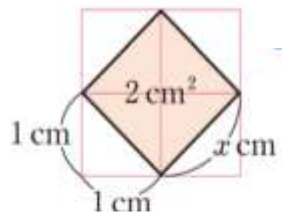
正確に作図するにはコンパスを使う必要があるが，直角が測れる定規だけでの作図でも十分である。

図１



③様々な面積の正方形を格子状の点を使用してかいてみる

平方数を面積とする正方形は格子点を結ぶことにより，簡単にかくことができる。しかし，面積が２，５，８，12 等の正方形は斜めに線を引くことによってかくことができる。線という長さがあるのに，なぜその数を数として表すことができないのか。



④２乗する２となる数は具体的にいくつ？

面積が２となる正方形をかくことができることは，辺もかくことができたことになる。辺があるのに長さは一体いくつなのか。

区間縮小法を用いて計算を進めると以下のようになる。

$\sqrt{2}$ の近似値は，次のようにして求めることができる。

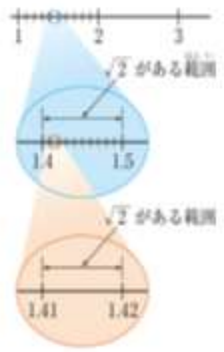
$1.4^2=1.96$，$1.5^2=2.25$ であるから，

$1.4 < \sqrt{2} < 1.5$　　①

$1.41^2=1.9881$，$1.42^2=2.0164$ であるから，

$1.41 < \sqrt{2} < 1.42$　　②

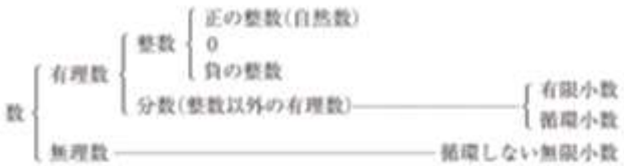
①，② から，$\sqrt{2}$ の小数第一位は 4，小数第二位は 1 であることがわかる。



このようにして計算していくと，$\sqrt{2}$ の近似値は，次のように小数部分が限りなく続き，より正確な値に近づいていく。

$$\sqrt{2}=1.41421356237309504880168872 4209\cdots$$

つまり，２乗して２となる数は循環をしない無限小数であることがわかる。そして，実数を以下のように分類をし，場合分けをすることで数の世界を拡張していくことになる。今まで理論で片付けることのできた数だったのに，新たに未知の数の世界へ足を踏み入れることは子どもたちにとっても大変新鮮なことであろう。



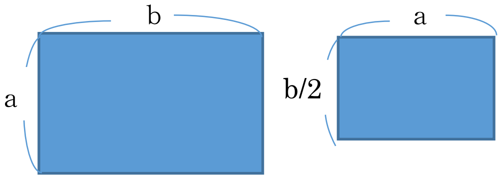
この先には，さらに２乗して－１となる数を「複素数」と呼び，高等学校では数の世界をさらに拡張していくことになる。

(2) コピー機の拡大・縮小

①用紙の縦と横の長さの比

用紙にはＡ規格とＢ規格とがある。世界共通な用紙はＡ規格の用紙であり，特によく使用されている用紙はＡ４サイズの用紙である。Ｂ規格は日本などでよく使用されているが，アジアが発祥のサイズである。しかし，Ａ規格の用紙もＢ規格の用紙も縦と横の比は等しく，相似な関係である。で　は，縦と横の長さの比はどのようになっているのか。用紙のサイズは次のように決まっている。例えばＡ規格の用紙はＡ０からA12 までであり，Ａ０を半分に折るとＡ１となり，Ａ１をまた半分に折るとＡ２になる。これを繰り返していき最後はA12 まで行き着くということである。これを活用することで縦を横の長さの比を計算で求めることができる。

縦をａ　横をｂとすると



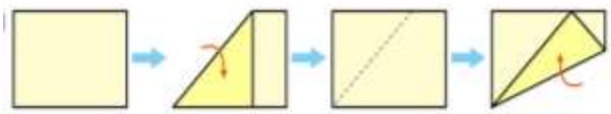
$$a:b=\frac{b}{2}:a$$

$$\frac{b^2}{2}=a^2$$

$$b^2=2a^2$$

$$b=\sqrt{2}a$$

よって$a:b=1:\sqrt{2}$

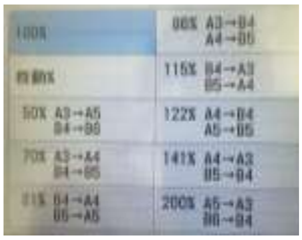


上記の方法で用紙を折ることでも縦と横の比が

$1:\sqrt{2}$ となっていることを確認することができる。

②コピー機で拡大や縮小をするには何%？

子どもたちが様々な紙面を書き，先生方に印刷をお願いする姿を見ることがある。Ｂ５サイズのルーズリーフに書かれた紙面を，Ａ４サイズに拡大することをよく行います。その際にはボタンを選びますが，115%のボタンを選択します。ではなぜ 115％なのでしょう。それぞれの拡大では，他にも違う倍率があるのでどのようなサイズの拡大の際に使用するのか調べてみた。ちなみにＢ規格の用紙はＢ０が 1.5 ㎡であり，数字はＡ規格と同じように半分にしていくと数字が上がっていく仕組みである。



Ａ４からＡ３　Ｂ５からＢ４・・・141%
- Ａ４が２枚でＡ３（Ｂ５が２枚でＢ４）となるので，各辺の長さが√２倍となる。√２の近似値は 1.414。
  よって 141%に拡大をすることになる
- 相似な図形において面積が２倍になるということは，各辺は√２倍にすればよい。√２の近似値は 1.414。
  よって，141%に拡大をすることになる

Ａ４からＢ４・・・122%
- Ａ０とＢ０の面積の比は１：1.5 であるので，同じ数が後ろについている場合は相似比が１：√３/２。よって√３/３は分母の有理化をすると√６/２。√２の近似値は 1.414，√３の近似値は 1.732 を使って計算をすると
  1.41×1.73＝2.449・・・・・
  2.449÷２＝1.22・・・・・
  よって 122%であることがわかる

Ｂ５からＡ４　Ｂ４からＡ３・・・115%
- Ｂ５をＢ４に拡大するには√２倍することになる。Ｂ４をＡ４に縮小するには√６/２の逆数をとり√６/３倍となる。よって計算式は
  √２×√６/３＝２√３/３
  √３の近似値は 1.732 を使って計算をすると
  ２×1.732÷３＝1.154・・・・・
  よって 115%であることがわかる
- Ｂ４をＢ３に拡大するには√２倍することになる。Ｂ３をＡ３に縮小するには√６/２の逆数をとり√６/３倍となる。上の方法と同様な計算をすると 115%であることがわかる

さらには，縮小の倍率についてもなぜその倍率になるのか調べてみたところ，以下のような計算をすることで理由をはっきりとすることができる。

Ａ４からＢ５　Ａ３からＢ４・・・86%
- Ｂ５をＢ４に拡大するには$\sqrt{2}$倍することになる。Ｂ４をＡ４に縮小するには$\sqrt{6}/2$の逆数をとり$\sqrt{6}/3$倍となる。よって計算式は
  $\sqrt{2}\times\sqrt{6}/3=2\sqrt{3}/3$
  この逆数は$3/2\sqrt{3}=\sqrt{3}/2$
  $\sqrt{3}$の近似値は 1.732 を使って計算をすると
  $1.732\div2=0.866\cdots\cdots$
  よって８６％であることがわかる
- Ａ３からＢ４についても同様の方法で導くことができる

Ｂ４からＡ４・・・81%
- Ｂ０とＡ０の面積の比は 1.5：１であるので，同じ数が後ろについている場合は相似比が$\sqrt{3/2}:1$。よって$\sqrt{3/2}$は分母の有理化をすると$\sqrt{6}/2$。この逆数は$\sqrt{6}/3$。$\sqrt{2}$の近似値は 1.414, $\sqrt{3}$の近似値は 1.732 を使って計算をすると
  $1.41\times1.73=2.449\cdots\cdots$
  $2.449\div3=0.816\cdots\cdots$
  よって 81%であることがわかる

Ａ３からＡ４　Ｂ４からＢ５・・・70%
- Ａ４が２枚でＡ３（Ｂ５が２枚でＢ４）となるので，各辺の長さが$1/\sqrt{2}$倍となる。分母の有理化をすると$\sqrt{2}/2$。$\sqrt{2}$の近似値は 1.414。
  $1.414\div2=0.707$
  よって 70%に縮小をすることになる
- 相似な図形において面積が$1/2$倍になるということは，各辺は$1/\sqrt{2}$倍にすればよい。分母の有理化をすると$\sqrt{2}/2$。$\sqrt{2}$の近似値は 1.414。
  $1.414\div2=0.707$
  よって，70%に縮小をすることになる

このようにただが，拡大･縮小の倍率ではあるが，タッチパネルのボタンを押すことで簡単に拡大したり縮小したりすることができる現代のコピー機の性能に，なお驚きを感じた。

(3) 題材と子どもたち

子どもたちは，コピー機での拡大・縮小の倍率を求める計算を通して平方根の計算方法を見いだしていくだろう。そして，分母の有理化をすることによって，おおよその値を求めやすさを実感するだろう。さらには，近似値を$\sqrt{2}$や$\sqrt{3}$の近似値を用いることによって何%の拡大・縮小なのかを見いだすことによって，コピー機の倍率の数値の成り立ちに気がつき，平方根という無理数との出会いから数の拡張を体験するだろう。

今後，子どもたちは平方根を活用し，無理数を用いれば因数分解できない式も因数分解することができたり，$\sqrt{2}+\sqrt{3}$のように根号の中の数が違っても２重根号を用いれば根号の中に式を入れてまとめられることに気がついたりするだろう。さらには，２次方程式の解法を考えたり，２次方程式の解の公式を導いたりすることを通して，２次関数のグラフと１次関数のグラフの交点の数とつなげていくだろう。

このように，子どもたちが平方根の世界に足を踏み入れたことによって数の世界が広がるように，子どもたちの疑問が全体で共有され，学級の問いを学級のみんなで解決の方向に導くことができるよう，指導者としても気を配りたいと思う。

参考文献：学校図書「中学校数学３年」
　　　　　啓林館「未来へひろがる数学３」
　　　　　上垣　渉（2006)『数学大好きにする“オモシロ数学史”の授業 30』明治図書
参考資料：無理数の歴史と作図 http://www7b.biglobe.ne.jp/~math-tota/su1/murisu.htm

３　該当する学習指導要領の内容

Ａ　数と式

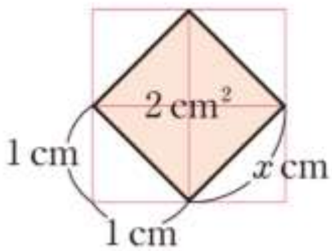
(1) 正の数の平方根について理解し，それを用いて表現し，考察することができるようにする。

ア　数の平方根の必要性と意味を理解すること。
イ　数の平方根を含む簡単な式の計算をすること。
ウ　具体的な場面で数の平方根を用いて表したり処理したりすること。

４　授業実践

(1)　用紙の規格を知ろう

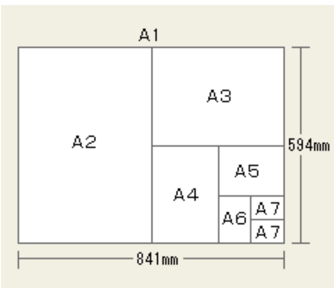
子どもたちに「面積が２の正方形を，格子点をもとにしてかいてみよう」となげかけることから始めてみた。すると子どもたちは面積が１の正方形をかくことは簡単にできたが，面積が２にすることはなかなかできなかった。しかし，斜めに直線をひくことで正方形をかくことを思いつきかくことができた。これをもとにして，面積が５，８などの正方形をかくことができることも思いついた。



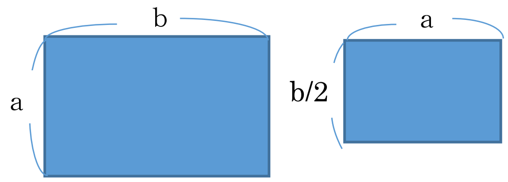
そこで，普段よく使用する用紙についてどのようなものなのか問いかけた。本校の子どもたちは様々な役割に使用する立候補紙面について頭に浮かび，そのことについて思い当たったようだったため，Ａ規格の用紙の縦と横の長さの比はどのようになっているのだろうと問いかけた。すると子どもたちは以下のような反応を見せた。

・用紙の特徴がどのようになっているのか
・よくＡ４サイズの紙は使用するが，Ａの後ろの数字は何を意味しているのか
・Ｂ４の用紙もよく使用するけどＡとＢの違いは何なのか
・ルーズリーフはどのサイズになるのか
など

そこでまずは，Ａ規格の用紙のことについて説明をした。Ａ４サイズのものを２枚くっつけるとＡ３サイズになることを全体で確認をすることで，Ａ０がかなり大きな用紙になることを子どもが想像することができた。さらにはそのＡ０は面積がちょうど１㎡であることも伝えた。すると次のような意見が出てきた。



・Ａ４とＡ３は相似である
・面積はＡ４の２倍でＡ３になっている
・縦をａ　横をｂとすると



$$a:b=\frac{b}{2}:a$$

$$\frac{b^2}{2}=a^2$$

$$b^2=2a^2$$

$$b=\sqrt{2}a$$

よって$a:b=1:\sqrt{2}$

この内容をなかなか理解できない子どもたちが多くいたため，この内容を全体で共有するため，４人グループで内容を確認した。

すると，子どもたちは次のような感想や疑問をもった。

・大きさは違っても用紙の縦と横の長さの比は全て１：√２であることがわかった
・数字が小さくなると用紙が大きくなり，数字が大きくなると用紙が大きくなることがわかった
・Ｂ４の用紙もよく使用するけどＡとＢの違いは何なのか
・ルーズリーフはどのサイズになるのか
・Ａ４をＡ３に拡大したり，Ａ３をＡ４に縮小したりするためには何%にすればよいのか
など

(2)　コピー機では何%に拡大や縮小をするの？

子どもたちは前時の授業で感じた感想をもとにして，「まずＡ３とＡ４の用紙の拡大縮小の関係について考えてみよう」と投げかけた。すると，子どもたちからコピー機には何%とかかいてあ

るタッチパネルがあることが出てきてので，何%のタッチパネルを押せばよいのか考えさせた。そると，次のような意見が出た。

- A４が２枚くっつくとA３になるのだから面積が２倍だから 200%？
- 200%ということは各辺の長さが２倍ということだから面積は４倍ではないか？
- 面積が２倍になるということは各辺が√２倍ということ？
- √２って近似値が 1.414 だから 141%を押せばいいのでは？

など

全体で 141%のボタンを押すことでA４がA３に拡大されることを共有する中で，相似な図形では辺の長さの比を２乗することによって面積の比となることを見いだした。

そこで，子どもたちから「A３からA４への縮小では何%のボタンを押せばよいのか」という問いが生まれ，全体で共有した。その後，次のような意見が出てきた。

- 拡大の逆だから１/√２ではないのか？
- １/1.414 ってだいたいいくつ？
- 分母と分子に√２をかけて√２/２にしたらわかりやすそう
- 1.414/２だから 70%じゃないの？

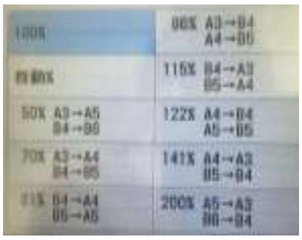
など

子どもたちは自分たちで除法の考え方だけでなく，分母の有理化をすることで値のおおよその大きさを知ることができるよさを見いだした。さらには，次のようなことを見いだした。

- A３とA４の拡大と縮小の倍率は，それぞれが逆数になっている
- ２つの倍率をかけると１になる

このような活動を通して，子どもたちはさらに疑問をもった。

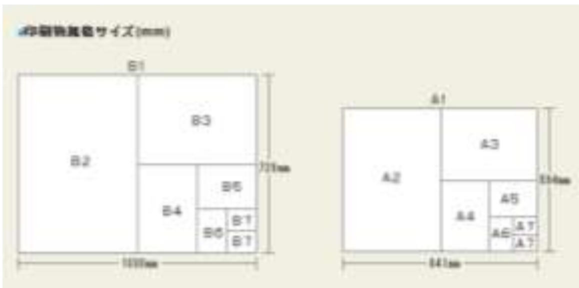
- ルーズリーフのB５をA４という一般的によく使用される用紙に拡大するためには何%のボタンを押せばよいのか
- Bという企画サイズはAとどのように違うのか
- 様々な%のボタンがコピー機にはあるけど，どんな拡大や縮小のときに使うのか



など

そこで，B企画のサイズの用紙について以下のことについて説明をした。

- Bの用紙と縦と横の長さの比は，Aの用紙と同じであること（１：√２）
- A０は１㎡だったことに対して，B０は 1.5㎡であること
- BもAと同様にB０を半分にするとB１に，B１を半分にするとB２……となり，全てのB企画の用紙は相似であること



⑶ コピー機の拡大・縮小から分かったことを共有しよう

子どもたちは，前時で提示したコピー機の倍率の画像を元に，その倍率になる理由を考えた。

Ａ４からＢ４・・・122％
・Ａ０とＢ０の面積の比は１：1.5 であるので，同じ数が後ろについている場合は相似比が１：√３/２。よって√３/３は分母の有理化をすると√６/２。√２の近似値は 1.414，√３の近似値は 1.732 を使って計算をすると
1.41×1.73＝2.449・・・・・・
2.449÷２＝1.22・・・・・・
よって 122％であることがわかる

Ｂ５からＡ４　Ｂ４からＡ３・・・115％
・Ｂ５をＢ４に拡大するには√２倍することになる。Ｂ４をＡ４に縮小するには√６/２の逆数をとり√６/３倍となる。よって計算式は
√２×√６/３＝２√３/３
√３の近似値は 1.732 を使って計算をすると
２×1.732÷３＝1.154・・・・・・
よって 115％であることがわかる
・Ｂ４をＢ３に拡大するには√２倍することになる。Ｂ３をＡ３に縮小するには√６/２の逆数をとり√６/３倍となる。上の方法と同様な計算をすると 115％であることがわかる

Ａ４からＢ５　Ａ３からＢ４・・・86％
・Ｂ５をＢ４に拡大するには√２倍することになる。Ｂ４をＡ４に縮小するには√６/２の逆数をとり√６/３倍となる。よって計算式は
√２×√６/３＝２√３/３
この逆数は３/２√３＝√３/２
√３の近似値は 1.732 を使って計算をすると
1.732÷２＝0.866・・・・・・
よって８６％であることがわかる
・Ａ３からＢ４についても同様の方法で導くことができる

Ｂ４からＡ４・・・81％
・Ｂ０とＡ０の面積の比は 1.5：１であるので，同じ数が後ろについている場合は相似比が√３/２：１。よって√３/２は分母の有理化をすると√６/２。この逆数は√６/３。
√２の近似値は 1.414，√３の近似値は 1.732 を使って計算をすると
1.41×1.73＝2.449・・・・・・
2.449÷３＝0.816・・・・・・
よって 81％であることがわかる
など

子どもたちはコピー機の性質を，自分たちで解明していくことで，倍率設定の理由を明確にするとともに，平方根の計算方法も確認していた。さらには分母の有理化することのよさを実感することで，具体的な数の大きさを導くことから倍率を計算で求めることができた。

倍率表

スケール	拡大/縮小	推　奨	第二候補
拡　大	A4→A3	140%	141%
	B5→B4		
	A5→A4		
	A4→B4	122%	
	A5→B5		
	B4→A3	114%	115%
	B5→A4		
等　倍	－	100%	
縮　小	A4→B5	86%	87%
	A3→B4		
	B5→A5	81%	82%
	B4→A4		
	A4→A5	70%	71%
	B4→B5		
	A3→A4		

表にまとめられた数の意味を学級全体で共有した子どもたちからは以下のような感想が述べられた。

・なぜ倍率がその数なのか理解できた
・倍率を求めるときには相似な図形の性質が必要でわることがわかった
・相似比を２乗すると面積比になることを利用すると，面積比の平方根をとることで倍率を導くことができた
・分母を有理化することで具体的な数の大きさを知ることができ，倍率を求めることにつながった
・拡大と縮小は倍率をかけて１になることから，拡大の倍率の逆数が縮小の倍率になっていることがわかった
など