実践事例２

１　題材名　　「星型多角形は特殊な図形か」　（第２学年）

２　題材観

(1) はじめに

数学の学習において，図形の論証を苦手とする子どもは多い。それは直観的に思ったことが本質を見抜いていたとしても，筋道を立てて表現することが容易でないからであると考える。

ここで扱う「星型多角形」は，多様な視点でとらえることができる図形であり，さまざまな図形的な性質をもっているものでもある。しかもそれらは，帰納的あるいは類推的に考えて導くことができるものであって，図形のもつ魅力を味わいやすい題材といえる。しかし，それだけでは導かれた性質が正しいとはかぎらないため，演繹的に考察を進めていく必要がある。角の性質に着目してみれば，これまでに学習した図形の基本的な性質だけで示すことができ，星型多角形に内在するおもしろさを十分に実感できると考えている。また，基本的な性質を根拠にして新たな性質が見いだされ，図形の系統的なつながりも意識できるだろう。

そこで，図形の性質を演繹的に考察することに着目し，既習事項を利用して新たな性質が見いだせることをねらって「星型多角形」を題材として選定し，子どもたちが説明し伝え合う活動を深めていきたい。

(2) 星型多角形のつくり方

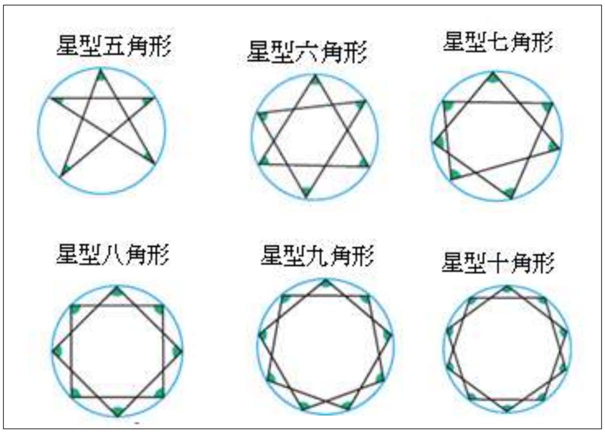
①星型多角形とは

いくつかの点を何点かとばして結んでいくことで得られる多角形を星型多角形という。星型多角形では，内部にある多角形の各辺を延長してできる角だけを内角とする。

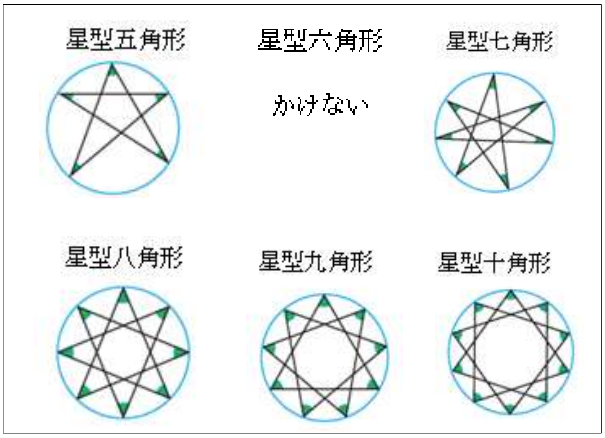
②星型多角形の種類

星型多角形では，点を何点とばしで結ぶのかによってその形状が異なる。

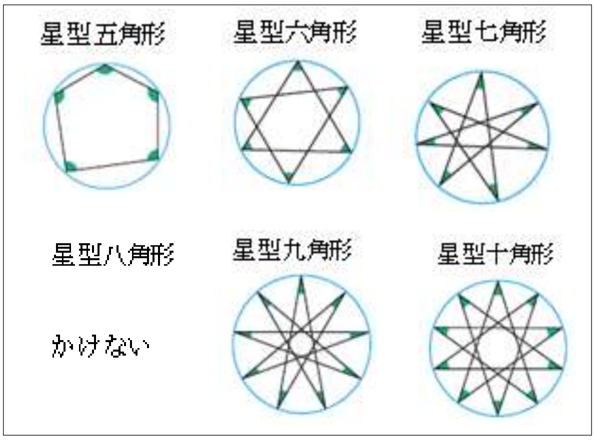
ア　１点とばし



イ　２点とばし



ウ　３点とばし

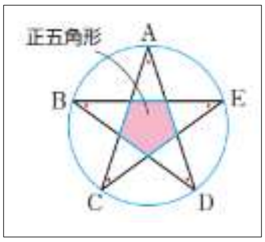


(3) 星型多角形の内角の和

（１点とばしに着目して）

①星型五角形の内角の和

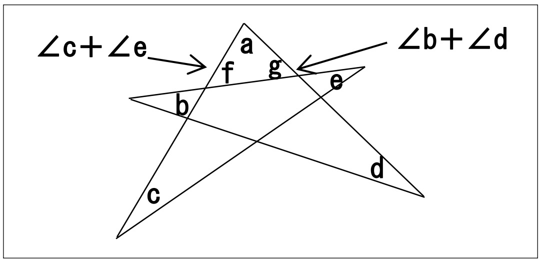
星型五角形には，下の図のように５点が同一円周上に等間隔に並び，内部にある五角形が正五角形になるようなものもある。しかし，ここでは５点が同一円周上に並ばず，内部にできる多角形が一般的な五角形の場合で考えてみる。



星型五角形の内角の和を求める例をいくつかあげてみる。

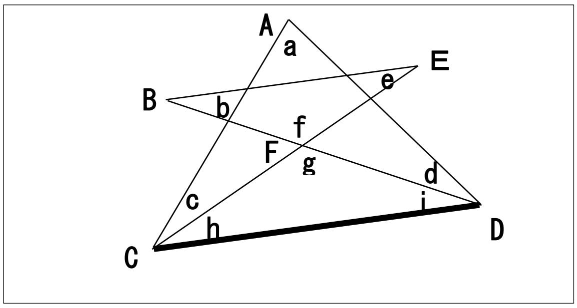
ア　１つの三角形に５つの角を集める

図より，三角形の外角の性質を利用すると，星型五角形の５つの角が１つの三角形の内角の和に等しく 180°であることがわかる。



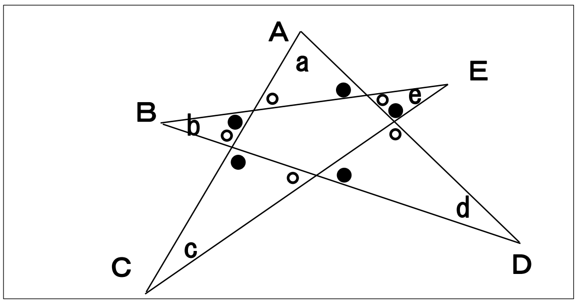
イ　２つの三角形の内角の総和から求める

線分ＣＤを引き，ＢＤとＣＥの交点をＦとする。星型五角形を２つの三角形ＡＣＤと三角形ＢＦＥに分ける。それらの内角の総和 360°から，△ＦＣＤの内角の和 180°を引き，星型五角形の内角の和 180°を求めることができる。



ウ　五角形の外角の和を利用する

図のように，星型五角形の５つの角をそれぞれ頂点とする三角形の角の和から五角形の外角の和を２つ分ひき，180°と求めることができる。

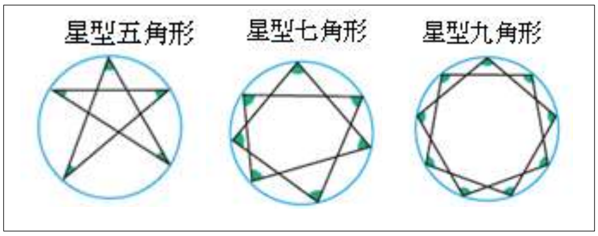


①では，図形の性質を利用することで星型五角形の内角の和を演繹的に求める例をあげた。では，結ぶ点の数を増やしたときに内角の和はどうなるだろうか。

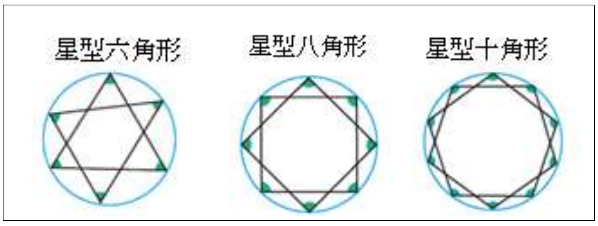
②頂点の数を増やした星型多角形の内角の和

頂点の数を増やした星型多角形は，次のように一筆書きができるものとそうでないものに分けることができた。

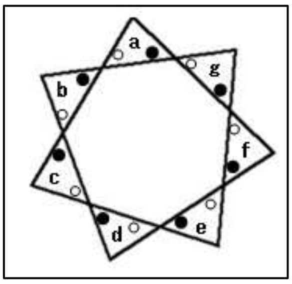
ア　一筆書きできる



イ　一筆書きできない



一筆書きができる星型多角形について見てみると，７点以上の点をもつ星型多角形の内角の和も，次の図を用いて星型五角形と同様に求めることができた。



では，一筆書きできない星型多角形の場合はどうだろうか。星型六角形は三角形が２つ（360°），

星型八角形は四角形が２つ（720°），星型十角形は五角形が２つ（1080°）の図形の組み合わせであり，その内角の和は容易に求められる。

星型多角形の内角の和を次の表にまとめた。

	星型五角形	星型六角形	星型七角形	星型八角形	星型九角形	星型十角形
1点とばし	180°	360°	540°	720°	900°	1080°

この表から，星型多角形の内角の和は，頂点の数が１つ増えるごとに，内角の和が 180°ずつ規則的に増加していることがわかる。一筆書きができるものもそうでないものも，内角の和を考える上で区別する必要はなさそうである。つまり，星型ｎ角形の内角の和は『180°×（ｎ－４）』と帰納的に求められるといえるだろう。

星型多角形の形状について，一筆書きができるか否かについて述べると，頂点の結び方がかかわっているといえるだろう。頂点を１点とばしで結ぶ描き方では，頂点の数が偶数の場合，頂点をすべて結び終わる前に最初の頂点に戻ってきてしまうため，一筆書きができないのである。

③頂点の結び方を変えた星型多角形の内角の和

頂点を２点とばし，３点とばしと点の結び方を変えて星型多角形を描いたとき，その内角の和も表にまとめてみた。

	星型五角形	星型六角形	星型七角形	星型八角形	星型九角形	星型十角形
1点とばし	180°	360°	540°	720°	900°	1080°
2点とばし	180°	できない	180°	360°	540°	720°
3点とばし	540°	360°	180°	できない	180°	360°

この表から，どのような点の結び方であっても，内角の大きさが 180°ずつ規則的に増加していることが読みとれる。１点とばしのときと同様に帰納的に考えれば，２点とばしの星型ｎ角形の内角の和は『180°×（ｎ－６）』と表されるが，ｎ≧７の場合に限られている。これは，ｎ＝５のときの星型五角形が１点とばしのときにできる形と同じであり，ｎ＝６のときは多角形にならないからであろう。また，３点とばしの星型ｎ角形の内角の和は『180°×（ｎ－８）』と表されるが，ｎ≧９の場合に限られる。これは２点とばしの場合と同様に，５≦ｎ≦７のときはすでに現れている形であるからであろう。

この表から，星型ｎ角形の内角の和は，点の結び方によって異なることがわかる。

> １点とばしの場合，180°×（ｎ－４）
> ２点とばしの場合，180°×（ｎ－５）
> ３点とばしの場合，180°×（ｎ－６）
> ⋮

ここで０点とばしの場合を考えてみる。０点とばしとは，点を順番に結んでいくことであり，一般的な多角形になり，その内角の和は『180°×（ｎ－２）』となることはよく知られている。つまり，０点とばし（多角形）も星型多角形の１つだとすれば，次のように推論することができる。

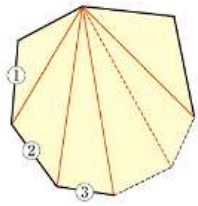
> ｎ点をｍ点とばしに結んだ星型多角形の角の和
> 180°×（ｎ－２ｍ－２）ただし，ｍ≦ｎ/３

星型多角形とは，一般的な多角形とは異なり特殊な形をしているが，見方を変えることで両者の関係性が明らかになった。

(4) 星型多角形の内角の和の求め方

多角形の内角の和は，180°×（ｎ－２）であることは，多角形を三角形に分割することで演繹的に示すことができる。では，星型多角形も同様に説明することができるだろうか。

図のように，一般的な多角形では１つの頂点から各頂点に引くことのできる線分は頂点の数よりも２つ少ない。これは頂点ととなり合う２つの点へは対角線が引けないためであり，内部にできる三角形の数も頂点の数よりも２つ少ないことがわかる。



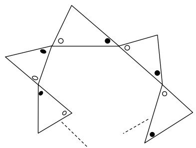
ｎ角形

また，頂点の数が１つ増えるごとに多角形内部にできる三角形の数が１つ増えるため，内角の和が 180°ずつ増えていく。つまり，多角形の内角の和は「180°×（ｎ－２）」は「（三角形の内角の和）×（三角形の個数）」ととらえることもできる。

ここで，星型多角形（１点とばし）についても演繹的な説明を考えてみる。

①ｎ角形の外角の和を利用する

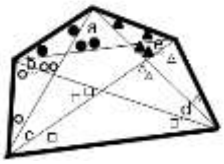
星型ｎ角形の角の和は『180°×（ｎ－４）』であるが，これを図形的に考察してみる。図のような星型ｎ角形があったとき，内部のｎ角形の周りにできるｎ個の三角形の内角の和は 180°×ｎで表される。



この三角形の内角の総和から，●に位置する内角の総和をひくことは，内部にあるｎ角形の外角の和，つまり 360°をひくことと等しいと考えられる。また，〇に位置する三角形の内角の総和も同様に 360°をひくことになる。よって星型ｎ角形の内角の和は，180°×ｎ－360°×２となり，『180°×（ｎ－４）』と同値となる。

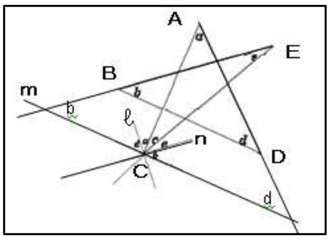
②ｎ角形の内角の和を利用する

星型ｎ角形について，各頂点を順番に結び（０点とばし），ｎ角形をつくる。そのときにできるｎ角形の内角の和は，180°×（ｎ－２）である。このとき，星型ｎ角形の各頂点のとなりにできた２角は，星型ｎ角形の外部にできた三角形の内角である。その２つの内角の和は，それととなり合わない外角に等しく，この外角は星型ｎ角形の内部にあるｎ角形の外角に等しい。そのｎ角形の外角の和は360°である。つまり，星型ｎ角形の内角の和は180°×（ｎ－２）－360°となり，『180°×（ｎ－４）』と同値となる。



③平行線の利用

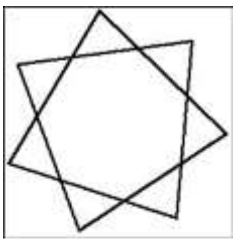
星型多角形の辺に平行な直線をひき，平行線の同位角・錯角の性質を利用して求める。１つの頂点に５つの角をとなり合わせにすることで，180°となる。星型ｎ角形の場合，星型五角形がｎ－４個できるので，内角の和は『180°×（ｎ－４）』となる。

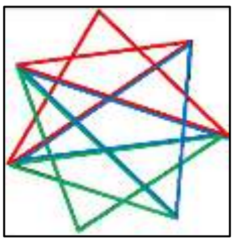


④（星型五角形の内角の和）×（個数）

多角形の内角の和が『180°×（ｎ－２）』と表されることは，『（三角形の内角の和）×（三角形の個数）』ととらえることができた。星型多角形の内角の和が『180°×（ｎ－４）』と表されることが，①②のような過程を経て明らかになった。しかし，最終的にまとめられた『180°×（ｎ－４）』にはどのような意味があるのだろうか。ここでいう「180°」や「ｎ－４」とは何を表しているのだろうか。そのような視点に立って星型ｎ角形の内角の和を以下に考察してみた。

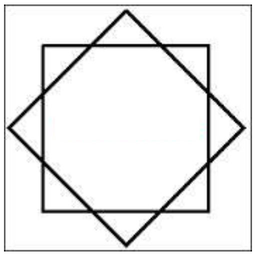
星型七角形を例として考えてみる。多角形を三角形に分割することで内角の和を求めたのと同じように，星型七角形を星型多角形の最小単位である星型五角形で分割できるか試してみた。

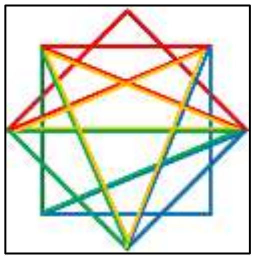




すると，星型七角形は３つの星型五角形への分割で，その内角の和を求めることができた。

では，星型八角形ではどうだろうか。一筆書きができない星型八角形でも，星形七角形と同様に４つの星型五角形に分割することができた。





つまり，星型ｎ角形の内角の和が180°×（ｎ－４）で求められるとき，「180°」が星型五角形の内角の和を表し，「ｎ－４」がその個数を表しているのであろうと考えた。他の星型多角形でも星型五角形に分割することを試してみると，そのようにいえることが確認できた。

以上のことから，特殊な図形である星型多角形の内角の和を求める式が，多角形の内角の和を求める式と同様に一般化され，その式の意味について理解を深めることができた。どちらもその基本単位となる三角形や星型五角形の内角の和に，図形に含まれるその個数を乗じることで内角の和を求めていたといえるだろう。多角形を０点とばしの星型多角形ととらえることができれば，思っていたほど星型多角形とは特殊なものではないのかもしれない。

(4) 題材と子どもたち

星型五角形は，誰もが一度は一筆書きで描いたことのある図形であるが，具体的にどのような図形なのか定義づけされていなかった。しかし，星型をした五芒星が宗教や国・民族の象徴などとして扱われてきた歴史を考えると，人を魅了する何かが星型の図形にはあるといえるだろう。

そこで，子どもたちが星型多角形を頂点の結び方から定義づけすることで，星型多角形を分類していく。そして，最も身近な「１点とばし」でつくることのできる星型五角形に焦点をあてていく。すると，これまでに気づかなかった図形の性質を発見し，その複雑な形状の中に存在する規則性に驚きを感じるだろう。特に星型多角形の内角の和が，頂点が１つ増えるごとに規則的に変化することへの関心は高いと思われる。そのような帰納的な考察に対しては，「本当にそうなるのか」「○○の場合はどうなるのか」と問い直し，新たに追究する姿が見られるはずである。しかし，帰納的な推論による説明では不十分であることを自覚している子どもたちは，明確な根拠をもって説明しようとするであろう。数学の用語を用い

て，誰が見ても納得できるような客観性のある伝え方をするかもしれない。授業者は，そのような姿勢を価値づけていきたい。

図形の基本的な性質である三角形の内角と外角の関係や多角形の内角と外角の和の求め方など，既習事項を利用して新たな性質を明らかにしていく過程には，図形の系統的なつながりを感じることができる。そして，三角形や四角形などの一般的な多角形から星型多角形へと図形の世界観を自分たちで創り広げていくだろう。まだ明らかになっていない星型多角形に関する疑問もあるが，それらについて追究していくことで，星型多角形の魅力や美しさを味わいながら，論理的かつ客観的に解決しようとする子どもたちの姿を期待したい。

参考文献：『中学数学資料集　数学の泉』　地域教材社

参考資料：星形の話　http://hp1.cyberstation.ne.jp/tfam/Maths/MathsIndex.htm

３　学習指導要領との関連

Ｂ　図形

(1) 観察，操作や実験などの活動を通して，基本的な平面図形の性質を見いだし，平行線の性質を基にしてそれらを確かめることができるようにする。

ア　平行線や角の性質を理解し，それに基づいて図形の性質を確かめ説明すること。

イ　平行線の性質や三角形の角についての性質を基にして，多角形の角についての性質が見いだせることを知ること。

４　授業実践

(1) 星形とは

子どもたちは，多角形（ｎ角形）の内角の和が「180°×（ｎ－２）」で求められることを説明した。しかし，「凹多角形については説明できるのか」ということについても議論した結果，「凸多角形なら確実にいえる」という認識をもった。このように図形の性質が「どのような場合でも成り立つのか」という一般性を大切にすることを授業者は子どもたちと確認した。その後，「多角形は凸多角形と凹多角形だけに分けられるのか」という包含関係をとらえた子どもの意見を授業者は取りあげ，点を結んでできる図形を紹介した。

子どもたちが点を結んでかいた図形は，以下の通りである。

- 線分の交点は頂点か
- ４つの点を結んだときの図形が，三角形が２個つながった図形と考えればいいと思う
- ５つの点を結べば三角形が３個できる
- 星形は十角形と同じ図形だと思う

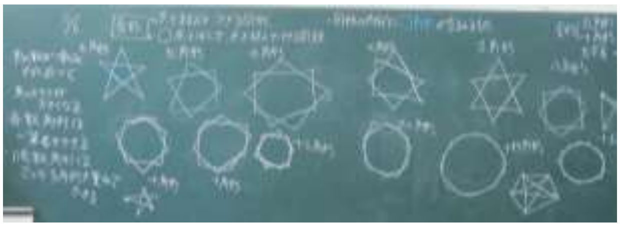
など

子どもたちから出てきた図形を見ると，同じ図形であっても線分の交点を頂点とみるかどうかで，その図形のとらえ方が異なっていた。

そこで，授業者は点を結んでできる図形のうち星形五角形（子どもたちにとっては十角形）を取りあげ，以下のように星形を定義した。

- 点を結んでできる図形
- ○点とばしで結んでできる図形
- 図形の内部に○角形が含まれるもの

定義にしたがって，子どもたちがかいた星形は次のようなものであった。



授業者は子どもたちとやりとりをしている中で「星形」という図形を受け入れることができない子どもが多くいることに気づいた。「（星形五角形は）これまでの十角形と同じ形なのに，わざわざ星形という意味があるのか」「なぜ角は 10 個ではなく５個なのか」など，子どもたちの思いはさまざまであり，以下は子どもたちが授業時に考えていたことである。

- ☆の形は十角形だから，内角は 10 個ある
- 10 個の内角の和は 1440°になるから十角形
- 星形のとがった５つの部分だけが内角だとす

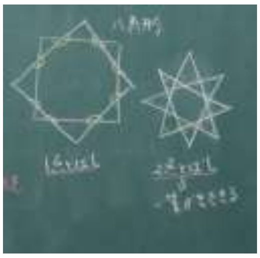
ると内角の和は 180°になり，五角形とはいえない
・十角形ではなく星形十角形といえばよい
・星形は凹多角形と同じ種類に入る
・星形は凹多角形の例外の図形だと思う
・交点は頂点ではないから五角形だと思う
・星形の内角の和を求める式もあるのか
・点の結び方を変えると異なる図形がつくることができるから，ただの多角形ではない
・星形は凸と凹が交互にある特殊な図形
・星形の図形を考える意味はあるのか

など

子どもたちの「十角形への執着」「星形を考える意義」に関する意見から，授業者は五芒星や六芒星のような星形を例にあげて，改めて星形の存在について定義をもとに確認した。そして「星形を図形として定義することで，何か見つけることができるか考えてみよう」となげかけた。「星形はこれまでの図形の中でも例外的な図形」や「星形は特殊な図形」と表現する子どもの言葉からは，「星形多角形」の不思議さを感じているようすがうかがえたからである。本題材の学習を終えた子どもたちが，どのような存在として星形多角形をとらえることができるのか楽しみになった時間であった。

(2) 星形の種類

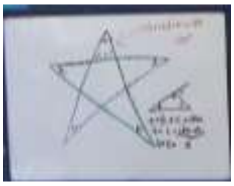
星形について疑問をもつ子どもが多かったことをふまえ，点を結んで星形をかく際には「１点とばし」に限定して考えるようなげかけた。「点の結び方を変えると異なる図形をつくることができる」という子どもが，図のような２つの星形八角形をかいたことで，「星形」という図形の意味を改めて確認したようであった。



(3) 星形多角形の内角の和

授業者は「なぜ（星形五角形は）十角形ではないのか」と子どもたちがこだわった理由の１つである内角の和について話題にした。「五角形なら内角の和は 540°であるのに，なぜ 180°にしかならないのか」という疑問が子どもたちには残っていたのである。そこで「星形五角形の内角の和は 180°である」ことを４人グループで確かめる活動に入った。以下は子どもたちが説明するためにかいた図や式である。

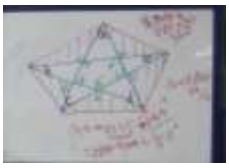
①星形五角形の５つの角が三角形の外角の性質を利用することで，１つの三角形の内角の和と等しくなり 180°であることがわかる。



②三角形の内角の和が 180°であることと対頂角は等しいという性質を利用することで，三角形の内角の和と等しくなり 180°であることがわかる。

③三角形の外角の性質と平角が 180°であることを利用して，180°であることがわかる。

④星形五角形の頂点を順番に結び五角形をつくる。そのときにできる五角形の内角の和から，星形の外部にある三角形の内角の和を５つ分ひき，内部にある五角形の内角の和を足すと 180°であることがわかる。



⑤平行線をひき，平行線にできる錯角の大きさが等しいことを利用して，１つの三角形の内角の和に等しくなり 180°であることがわかる。

など

子どもたちからは多様な説明がなされた。中には星形五角形の内角の和から，星形ｎ角形の内角の和の求め方につなげて発表した子どももいた。

⑥星形ｎ角形のｎ個の内角をそれぞれ頂点とする三角形の内角の和から，内部にあるｎ角形の外角の和を２つ分ひ

くと求めることができるから，星形ｎ角形の内角の和は
「180°×ｎ－360°×２」　になる。

五角形から，ｎ角形という一般化された形の説明に戸惑う子どももいた。「なぜそれがいえるのか」と尋ねる子どももおり，全体で納得がいくまで話し合う時間をとった。これまで自分たちが明らかにしてきた図形の性質を根拠に，子どもたちは話し合い理解を深めた。以下は，星形ｎ角形の内角の和について共有した子どもたちが「星形多角形を今どのような図形として考えているか」について記述した内容である。

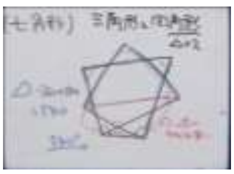
・星形は今までやってきたことの集大成
・星形は色々なところで見るが，見る目がちがってきた
・星形は規則性があっておもしろい
・星形は凸多角形にはない発想が多く見られた
・角度を求めるだけでこんなにたくさんの方法が出るなんて，単純におもしろい形だ
・星形の内角の和は 180°×（ｎ－４）となったから，十角形とは別物だと思った
・星形多角形は多角形の中で例外な図形なのか
・星形は多角形の中でも特殊なもので，かき方や見方で別のものにとらえることができる
・星形は他の多角形と違って説明や式が特殊で興味深い
・星形は非常に特殊だ

など

星形ｎ角形の内角の和の求め方について仲間と話し合った子どもたちは，星形がこれまで扱ってきた多角形（凸多角形・凹多角形）とは異なり，特殊な図形であるという思いをもっていた。また，これまでに自分たちで明らかにしてきた図形の性質を用いることで，新たな性質を見いだせたことに喜びを感じる子どももいた。

ここで，授業者は多角形の内角の和が１８０°×（ｎ－２）で求められたことを想起させ，星形の内角の和の求め方と並べてみた。子どもたちからは「似ている」「三角形の内角の和×個数」等の発言がなされた。そこで，４人グループで「星形ｎ角形の内角の和『180°×（ｎ－４）』を言葉の式で表してみよう」となげかけた。

・ｎ－４がどこの三角形の数なのかわからない
・星形七角形は右のように分割したら，三角形が７－４で３個といえる



・180°は平角かも知れない
・頂点の数が増えると内角の和は 180°ずつ増えているから，三角形が１つずつ増えているはず

など

子どもたちは，180°が三角形の内角の和や平角の大きさであるととらえ，星形多角形の内角を三角形の何個分であると考えたり，平行線を利用して平角をつくろうとしたりしていた。しかし，どの方法でもｎ－４が何を表しているか説明することができなかった。授業者は多角形を三角形に分割することで内角の和が求められたことを図に描いたり，内角の和が 180°ずつ増えていくことを示したりして，図形的な視点を強調したが，星形五角形の内角の和に注目する子どもはいなかった。「ｎ－４は三角形の数だと思う」「ｎ－４だけ三角形があるとはいえないから，別の意味があると思う」などの発言から，ある図形の中から特定の図形を見つけ出す難しさを授業者は感じ，星形多角形の内部に星形五角形を実際に描き加えることで子どもたちの気づかなかった視点をなげることにした。以下は，その後の子どもたちのあらわれである。

・星形五角形の内角の和も 180°だから，星形五角形が増えていくのかもしれない
・星形六角形は星形五角形が２個，星形七角形は３個あると考えられる
・星形六角形に２つの星形五角形がかけた
・星形七角形には３つの星形五角形がかけた
・180°×（ｎ－４）＝（星形五角形の内角の和）×（星形五角形の数）といえる

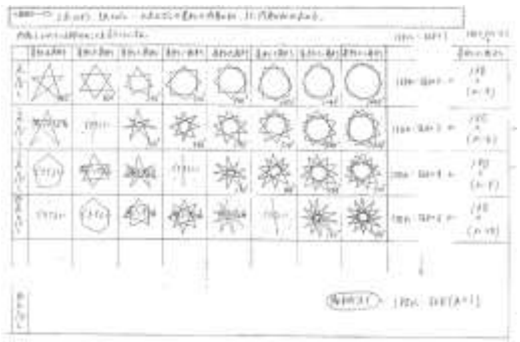
など

子どもたちは，星形六角形の中に星形五角形を見つけると，次々に星形多角形の中に星形五角形を描いていった。そして，星形ｎ角形の内角の和が『（星形五角形の内角の和）×（星形五角形の数）』と図形的な視点でとらえることができていることが子どもたちの対話から確認された。

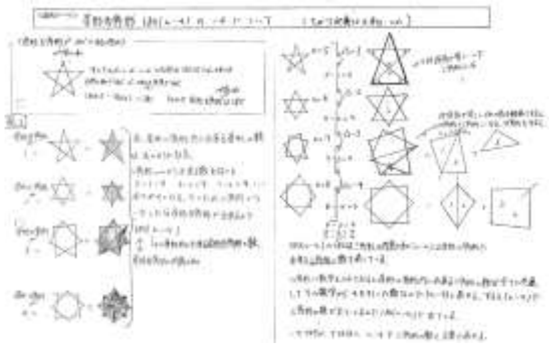
しかし，「これでは証明したことにならないのではないか」と発言したり，「ｎ－４の４は何を表しているのだろう」とつぶやいたりする子どももいた。根拠がまだ十分ではなく演繹的な説明を求めようとする子どもたちの声を受け，個人で追究する時間をとることを伝えた。そこでは，これまでに抱いた疑問や考えたことについて追究することも認めた。以下は子どもたちが追究したテーマであり，互いに情報交換することで子どもたち自身の追究テーマや星形五角形についての理

解を深めていった。

・星形多角形の外角
・星形多角形の内角の和～星形ａ角形をｎ点とばしで結んだ図形～



・180°×（ｎ－４）の４は何を表しているのか



など