実践事例１

１　題材名　　「比例」　（第１学年）

－可視化された緊急地震速報－

２　題材観

(1) はじめに

身の回りに比例といえる数量関係はたくさんある。例えば「買い物をするときの個数と値段」「車で移動するときの距離と時間」「影の長さとものの高さ」など，さまざまな場面に存在し，さらにこれらの比例の関係は私たちの日常生活に自然と活用されている。しかし，このような比例の関係をあたりまえと考えることなく，一歩立ち止まってとらえ直してみてはどうだろうか。拠りどころとなるのが表，式，グラフである。

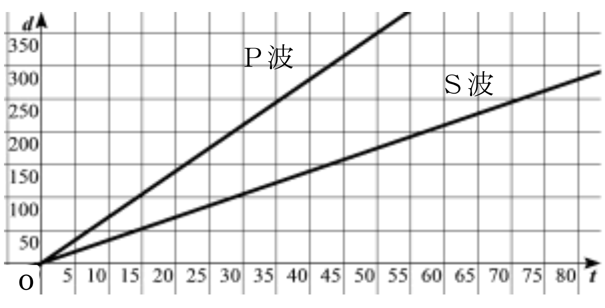
地震発生時に，地震の到来を知らせる緊急地震速報もその一つである。そこに比例の関係があることを表，式，グラフにまとめ，その関連から比例の関係を見いだしたい。そして，そこから生まれる疑問を追究していくことで，比例の概念を再構築してみようと考えた。

(2) 緊急地震速報のしくみと比例

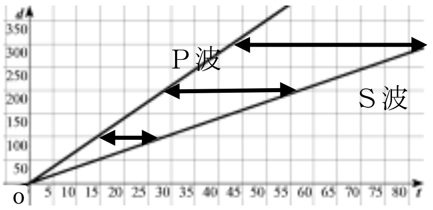
地震が発生すると，震源からは揺れが波（地震波）となって地面を伝わっていく。地震波には，Ｐ波（Primary「最初の」の頭文字）とＳ波（Secondary「二番目の」の頭文字）があり，Ｐ波の方がＳ波より速く伝わる性質がある。

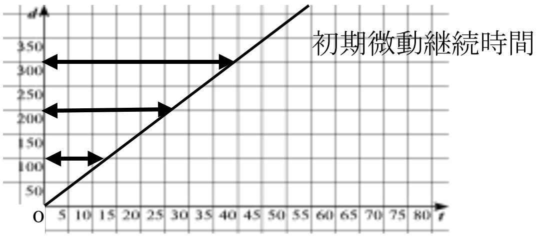
２つの地震波は，時間と距離が比例する。もう少し具体的に言うと，Ｐ波が届くまでの時間をt_1，Ｓ波が届くまでの時間をt_2，震源からの距離をｄとしたとき，以下の式が一般的に成り立つ。

$$d=7t_1 \qquad d=4t_2$$



２本のグラフの間に目をむけると，徐々に広がっていくことがわかる。２本のグラフの間とは，Ｐ波とＳ波が届くまでの時間の差のことであり，これを初期微動継続時間という。





震源地からの距離に対し，初期微動継続時間は比例していると言える。言い替えると，初期微動継続時間に対し，震源までの距離が比例していることとなり，初期微動継続時間がわかれば，震源からの距離がわかる。これが緊急地震速報に活用されている。

(3) 表，式，グラフの関連

Ｐ波とＳ波が届くまでの時間の差と震源からの距離を表にまとめてみると，次のようになる。

初期微動継続時間 t（秒）	0	10	20	30	40
震源からの距離 d（km）	0	75	150	225	300

この表から言えることを挙げてみる。

① ｔ＝０のとき，ｄ＝０である
② ｔが２倍，３倍，……となれば，ｄも２倍，３倍，……といえる
③ ｔが 10 ずつ増えると，ｄは 75 ずつ増える

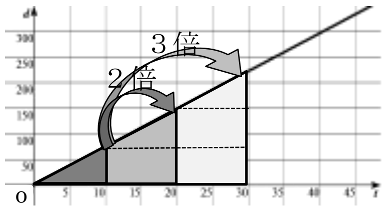
$$\frac{\text{dの増加量}}{\text{tの増加量}}=\text{一定}（7.5）$$

④ ｔに定数（7.5）をかけるとｄになる

①は，グラフの原点を通るという意味である。

②は，グラフでは辺の比の等しい相似な三角形が描けると考えると，底辺が２倍，３倍，……となると，高さも２倍，３倍，……と考えることができる。

初期微動継続時間 t（秒）	0	10	20	30	40
震源からの距離 d（km）	0	75	150	225	300

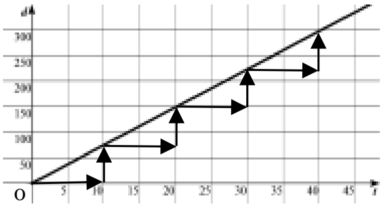


③は，グラフの傾きを示している。ｔの増加量が一定であれば，ｄの増加量も一定である。また，ｄの増加量／ｔの増加量は常に一定である。

+10 ずつ増加する

初期微動継続時間 t（秒）	0	10	20	30	40
震源からの距離 d（km）	0	75	150	225	300

+75 ずつ増加する

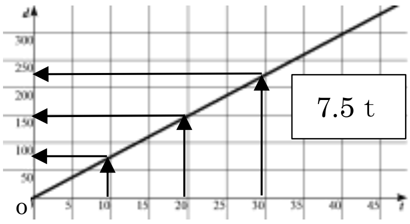


④については，比例を定義づけるうえで，もっとも重要なことである。これまで横の変化について考えていたことが，縦の対応となる。さらに，この対応からｄ＝7.5ｔで表すことができる。

初期微動継続時間 t（秒）	0	10	20	30	40
震源からの距離 d（km）	0	75	150	225	300

×7.5

グラフは一目で変化のようすを読み取ることができ，関数を理解するうえで重要な役割を担っている。グラフから数値を読み取り，表にまとめ，その表からまた考え直す活動を通して，グラフの傾きは，表の変化の割合を導き出し，それは同時に式の比例定数となっている。このような，比例定数が意味するものを子どもたちが見つけていくことで，比例の概念を再構築していきたい。



(4) 題材と子どもたち

地震は静岡県に住む子どもたちにとって，切実感のある事象だろう。この事象を数学的に扱うため，地震波のＰ波とＳ波が届くまでの時間が震源からの距離に比例することを取り上げ，可視化しようと思う。すると，もうひとつの比例を見つけることができ，子どもたちは初期微動継続時間と震源からの距離の関係に驚きを感じるだろう。そして，「揺れの大きさが震源からの距離と関係があるのではないか」「比例の関係を負の数まで広げたらどうなるだろう」など，さらなる問いを生む子どももいるだろう。そういった思いを大切にしながら，比例の世界を広げていきたい。その際，事象をそのまま扱うのではなく，理想化・単純化して変化や対応の特徴をとらえることを大切にする。

日常生活において数量関係を考える基礎となる比例の学習では，表，式，グラフの形式的な学習にとどまることなく，事象を具体的に考察することを通して，関数関係を見いだしたり，表現したりする力を育む。そして，小学校算数科で学習した比例をとらえ直すことで，論理的かつ客観的な視点をもって比例の概念を再構築し，比例の理解がより深められるであろう。これらの活動を通して，子どもたちが身近な事象を，表，式，グラフにしてみようと考えてくれることを願う。

参考文献：岩村繁夫（2001）『比例の発見　中学数学への橋渡し』　太郎次郎社エディタス
上山明博（2013）『関東大震災を予知した二人の男』　産業新聞出版
仲田紀夫（2003）『新版・中学数学の科学的勉強法』　評論社
『新版　理科の世界１』　大日本図書

３　学習指導要領との関連

Ｃ　関数

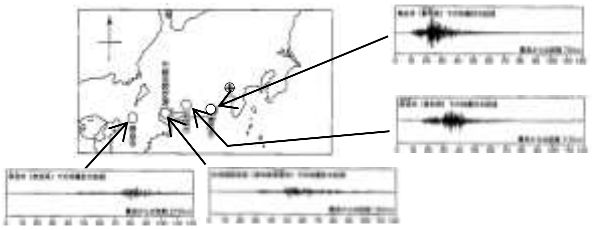
(1) 具体的な事象の中から２つの数量を取り出し，それらの変化や対応を調べることを通して，比例，反比例の関係についての理解を深めるとともに，関数関係を見いだし表現し考察する能力を培う。

ア　関数関係の意味を理解すること。
イ　比例，反比例の意味を理解すること。
ウ　座標の意味を理解すること。
エ　比例，反比例を表，式，グラフなどで表し，それらの特徴を理解すること。
オ　比例，反比例を用いて具体的な事象をとらえ説明すること。

４　授業実践

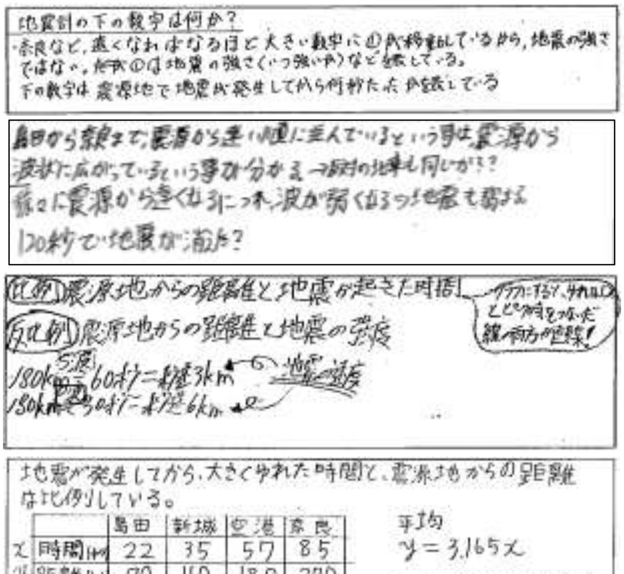
(1) 地震と比例

はじめに授業者から，静岡県東部地震の観測データを提示し，「この資料から，気づくこと，考えられること，予測できることを挙げてみよう」となげかけた。子どもたちは，東日本大震災の揺れについてはよく覚えていたが，静岡市も震度４を観測した静岡県東部地震について，ほとんどの子どもが覚えていなかった。夜 22 時以降の地震だったためと考えられる。本題材を扱うにあたり，震災に対する心的不安を抱える子どもがいないか十分に配慮して実施した。

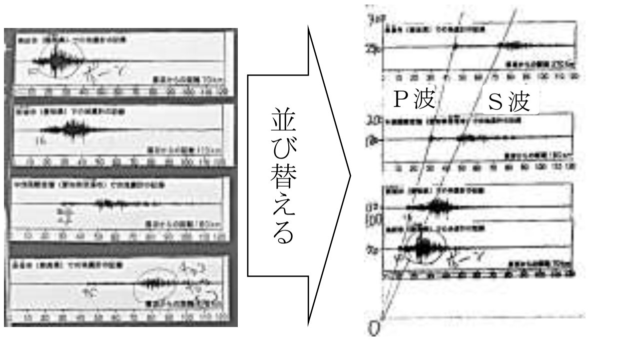


資料：静岡県東部地震（2011 年 3 月 15 日）

子どもたちは，目盛りの数値に注目し，何を表しているのか，単位は何なのかを考えていた。そして，震源からの距離が遠くなるほど，揺れが届くまで時間がかかることを予測していた。以下のものは子どもたちの記入したワークシートの一部である。



授業者は，子どもたちから出た意見を板書しながら，比例関係になっているものを丁寧に確認した。そして，震源からの距離と地震の揺れが届くまでの時間が比例することを説明するため，観測データを切り取って並び替えてみようとなげかけた。



子どもたちは，震源からの距離によって並び替えられたグラフを見て「揺れる時間が右上がりにずれていること」や「小刻みな揺れと大きな揺れがあること」に気づいた。また，「縦揺れと横揺れ」という表現をする子どものつぶやきから，観測データでは，縦揺れと横揺れがどのように表されているのかを考え始めた。イメージのもてない子どもには，地震波の伝わり方をばねの動きに例えて，ばねを揺すったり伸縮させたりする動画を子どもたちに見せた。子どもたちは，波の伝わる速さの違いを実感し，わかったこと，さらに調べたいことを記入するように伝え，授業を終えた。子どもたちからは次のような内容が記入された。

・揺れのピークは直線で結ぶことができた
・地震波の伝わり方には２種類あることがわかった。震源からの距離にＰ波もＳ波もそれぞれ届くまでの時間が比例している
・震源から遠ざかるほど伝わるのが遅く，揺れが小さくなっている。その距離と時間に規則があると思う。近い方は揺れが大きく短いが，遠くなってくると揺れが小さく長くなっている
・揺れのピークと距離だけでなく，揺れのはじまりも距離と比例していた
・終わりと距離も比例しているのだろうか
・はじまりの点からピークの点の間の距離がだんだん長くなっているので，その距離も比例しているのか

など

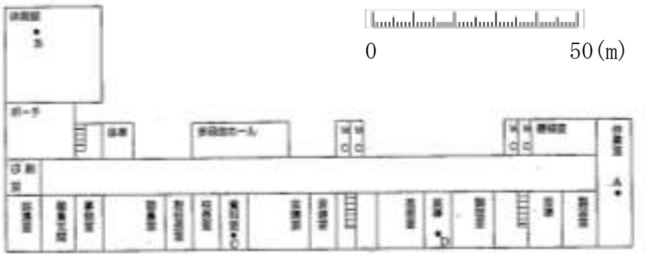
(2) 緊急地震速報のしくみと比例

授業者は，子どもたちと前時までの学習を振り返る中で，授業用に準備した緊急地震速報を流す。子どもたちは，何がはじまるのか興味をもちながら，内容に耳を傾けていた。

この地震は数学の授業のために発生したものです。実際の地震とはまったく関係ありませんので，心配せずに聞いてください。
10 時 15 分 51 秒，とある中学校のどこかで地震が発生しました。Ｐ波の速度は秒速 12m，Ｓ

波の速度は秒速４ｍとして，４つの観測地点で地震のＰ波とＳ波を観測しました。観測時刻を伝えるので，震源から 20m以内にいる人は避難してください。

観測地点	Ｐ波が届いた時刻	Ｓ波が届いた時刻
A	10 時 15 分 54 秒	10 時 16 分 00 秒
B	10 時 16 分 01 秒	10 時 16 分 21 秒
C	10 時 15 分 56 秒	10 時 16 分 06 秒
D	10 時 15 分 52 秒	10 時 15 分 54 秒



授業者は，各観測地点がわかる地図とそれぞれの観測地点の時刻を机の裏に貼り付けておき，「震源をみつけてみよう」となげかけた。観測時刻はそれぞれ異なるので，子どもたちは必然的に４人組になり，以下のような意見を述べながら震源を見つけ出していった。

・地震波の届いた時間が早い地点が震源から近いだろう
・地震発生からの時間と震源からの距離が比例関係にあるから，地震発生時刻と観測時間がわかれば，震源までの距離がわかるので，震源地を見つけることができそうだ
・地震発生の時間からＰ波が届くまでの時間がわかっているのだから，Ａ地点の震源からの距離はＰ波の速さ 12×３＝36mだ
・地図は１cmが 10mの縮図になっているから，36mだったらＡ地点からは 3.6 cmの半径の円を描けば円周上に震源があることがわかる
・震源からの距離が１地点だけわかっても東西南北，どちらの方角かわからない。２地点，いや３地点の震源からの距離が必要だ

など

そして，子どもたちは，それぞれの地点の震源までの距離を導き出し，コンパスで円を描いて震源がどこにあるのかを断定することができた。学級全体で震源がどこにあるのか全体で確認した後，授業者から「もし地震が発生した時間がわからなかったら震源をみつけることができるか」となげかけた。ここでのねらいは，地震発生からの時間以外に変化しているものに視点を向けさせることであったが，子どもたちは地震発生の時刻を求めるための方程式を導き出していった。

地震が発生した時刻を 10 時 15 分ｘ秒とする。

$$12(56-x)=4(66-x)$$
$$672-12x=264-4x$$
$$-12x+4x=264-672$$
$$-8x=-408$$
$$x=51$$

したがって，地震が発生した時刻は，10 時 15 分 51 秒である。

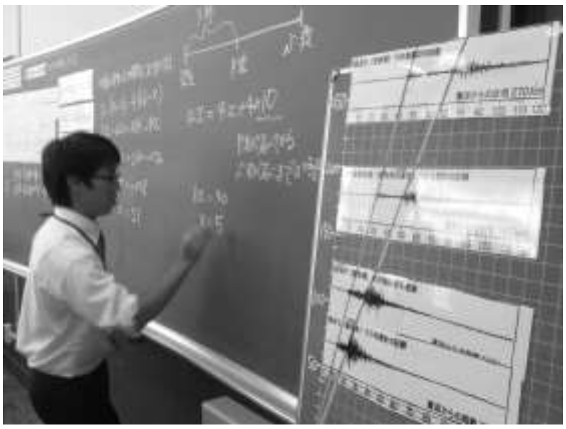
さらに，地震発生の時刻を基準０と考え，次のような方程式も述べられた。

地震発生から Ｐ 波が届くまでの時間をｘ秒とする。

$$12x=4(x+10)$$
$$12x=4x+40$$
$$12x-4x=40$$
$$8x=40$$
$$x=5$$

したがって，Ｐ波が届いた時刻から５秒前，
10 時 15 分 56 秒-5 秒＝10 時 15 分 51 秒である。

12ｘ＝４（ｘ＋10）の 10 がなにを表しているのかを問い直すことで，子どもたちは２つの地震波が届くまでの時間の差に着目し，「２つの地震波が届くまでの時間の差は，震源からの距離に比例しているのではないか」という考えをもちはじめた。このような考えが子どもたちの間で共有されることにより，「震源からの距離がわかれば地震波が届くまでの時間の差がわかるのではないか」もしくは，「地震波が届くまでの時間の差がわかれば，震源までの距離がわかるのではないか」という仮説を立てることができた。



(3) 比例の概念の再構築

授業者は，「２つの地震波が届くまでの時間の差（初期微動継続時間）と震源からの距離が比例していることを，根拠を明確にして説明してみよう」となげかけ，比例の概念を創りあげていった。子どもたちは，以下のような説明でまとめていった。

一方の量が２倍，３倍，……と変化するのにともなって，もう一方の量も，それぞれ２倍，３倍，……と変化する

初期微動継続時間 x（秒）	0	2	4	6	…
震源までの距離 y（km）	0	12	□	36	…

一方がm倍になれば，もう一方もm倍になる

×m

初期微動継続時間 x（秒）	0	2	6	10	20
震源までの距離 y（km）	0	12	36	60	120

×m

子どもたちは「初期微動継続時間が３倍になれば，震源までの距離も３倍になっている」と１箇所だけを示すのみになってしまうこともあったが，授業者から「他の数でも言えるのか」と声を掛け，２倍，３倍，……で示す意味や，m倍するという一般化する意味について理解していた。

ｙ／ｘが常に６の一定になる（ｔ≠０）

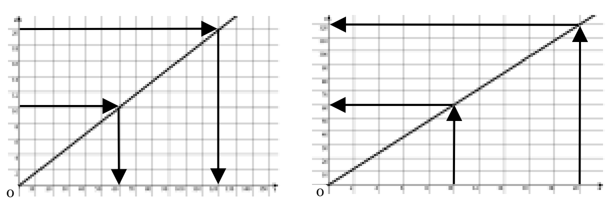
初期微動継続時間 x（秒）	0	2	6	10	20
震源までの距離 y（km）	0	12	36	60	120
y／x		6	6	6	6

ｔに６をかけるとｄになる

初期微動継続時間 x（秒）	0	2	6	10	20 ×6
震源までの距離 y（km）	0	12	36	60	120

子どもたちはどこでも同じ数をかければ震源までの距離を求めることができることに驚き，表で比例の関係を示すには，横の変化よりも縦の対応の方が説明しやすいと感じ，その利点について説明していた。また，その対応が式の比例定数で表せることに気づくことができた。

左：ｘ軸→初期微動継続時間，ｙ軸→震源までの距離
右：ｘ軸→震源までの距離，ｙ軸→初期微動継続時間



グラフは原点を通る直線になっているので，子どもたちは，横軸の数値をあてはめれば縦軸の数値を読み取ることができ，逆に縦軸の数値をあてはめれば，横軸の数値はひとつに決まるとまとめていった。表の対応で読みとった６はグラフの傾きを指しており，階段のようにしてｔが１増加するときの値を示すことで説明していた。

・$\frac{y}{x}=6$　　・$x=\frac{1}{6}y$　　・$y=6x$

比例定数６が求められたところで，授業者はこの地震が空想上のものであることを再確認しながら，本題材で明らかにした比例定数は，実際の地震で震源までの距離を求める魔法の数字「大森係数 7.42」のことであり，地震発生時の緊急地震速報に活用されていることを伝えた。子どもたちから，授業のまとめに以下のような感想が述べられた。

- Ｐ波とＳ波が届くまでの時間の差も震源からの距離と比例しているなんて驚いた。それを緊急地震速報に活用しようと考えた人はすごい
- 比例の関係を一度，表にまとめることで，式やグラフに表しやすいと思った。また，表を横の変化で見ていたのが，縦の対応で見られるようになった
- 表，式，グラフには関連する部分があることがわかった。事象を説明するとき，いくつかの視点でとらえることは大切だと思う。また，相手に伝えるとき，言葉だけでなく視覚的に示すことでよりわかりやすい説明になる
- 「比例といえること」について考え直すことで，文字を使ってｙ＝ａｘの式で一般化できるとわかった
- 揺れの大きさが震源からの距離と関係があるのではないか。地震後の津波警報にも比例の関係が利用されているのではないか
- 比例が利用されて便利になっているものが，他にもあるのではないか。身の回りの他の２つの数量関係からも表やグラフにすることで新しい発見があるかもしれない。

など