令和７年度　中学２年生実践「式の利用：図形の性質の説明」　R7.5.21&22 実践

静岡大学教育学部附属島田中学校　稲熊紀昭

１　はじめに

学校図書の教科書には，１章『式の利用』の後半に，文字を使って図形の性質を説明する場面で，次のような図（図１）が提示される。

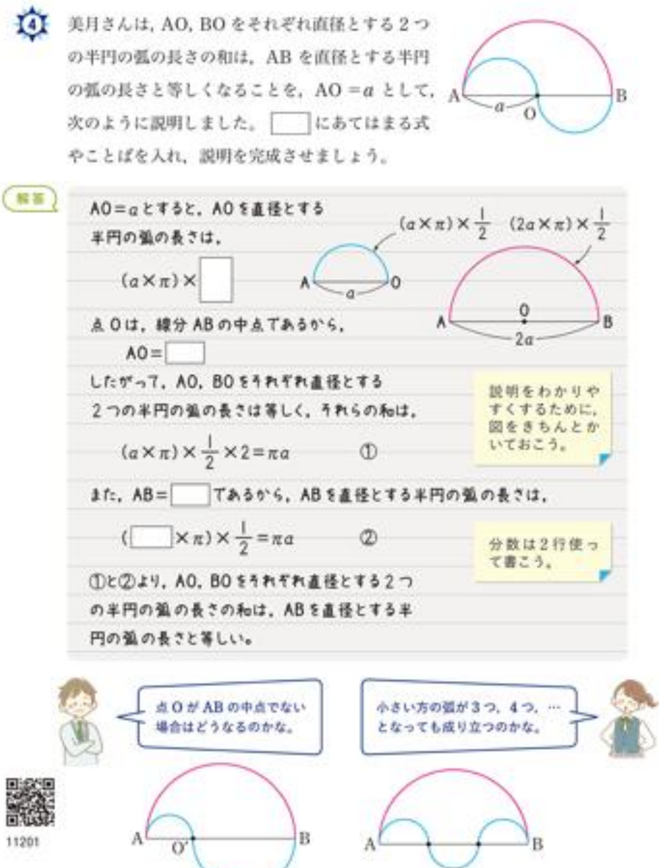

図１　教科書（学校図書）での取り扱い

この場合，例えば AO＝r などの文字を使うことで，$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AO}+\overset{\frown}{OB}$であることを説明することができる。この関係は，点 O が AB の中点でない線分 AB 上の任意の点 C となっても同様のことがわかり，加えて点の数が増えても成り立つことがわかる。これらのことから，条件を変えて発展させても等式が成り立つという統合的な結論が得られる題材である。しかし，半円の直径である線分 AB 上の点を使うことしか考慮されていない点や，最初の図を提示する際に既に$\overset{\frown}{AO}$と$\overset{\frown}{OB}$が図の中に示されており，長さが等しいことを発見する，というよりは長さが等しいことを，文字を使って確認する活動であるように感じた。

以上のことから，この題材を取り扱う上で，

①　課題提示の場面の工夫

②　点が線分 AB 上にない場合の統合的な結論へと結びつく授業展開

以上２点について意識した授業実践を行った。

２　授業の流れ

（１）第１時

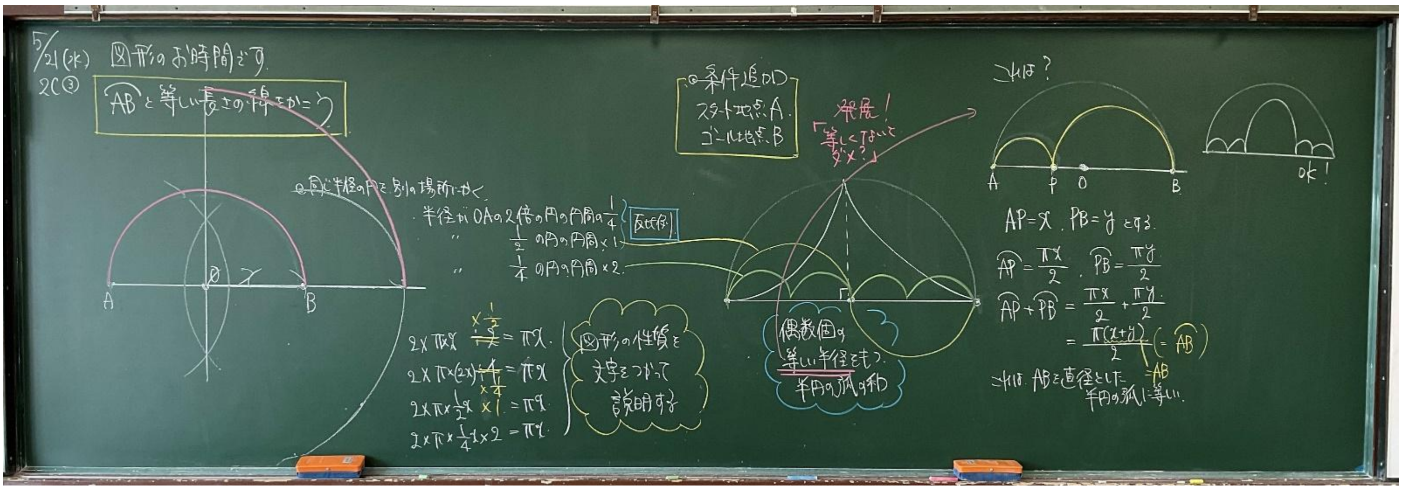

図２　第１時の板書

①課題提示の場面の工夫として，次のような学習課題を提示した。

学習課題　AB を直径とする半円の弧である$\widehat{\mathrm{AB}}$と等しい長さの線をかこう

生徒たちは，始めは直線で等しい長さを表現しようとするが，$\widehat{\mathrm{AB}}$ に円周率πが含まれていることに気づき，直線ではなく曲線で表現する必要があることに早い段階で気づいていた。中学２年生段階で表現できる曲線は円（あるいはその一部である弧）と反比例のグラフである双曲線の２種類で，その中でも扱いやすい円を選択している生徒がほとんどであった。その内，半径を半円の２倍にして円周 1/4 の弧をかく生徒（図３）が現れ，全体で共有した後に次々と円弧で等しい長さの曲線をかいていった。長さが等しい根拠として，$\mathrm{AO}=\mathrm{OB}=x$として弧の長さを計算し，長さが$\pi x$となることで説明ができていた。

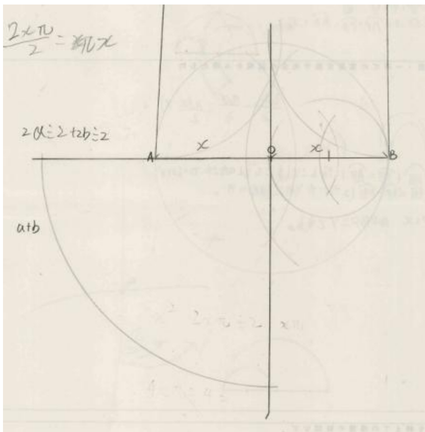

図３ 生徒のかいた図１

２ それらの結果から，半径を２倍にすると円周の 1/4，半径 1/2 だと円周，半径 1/4 だと円周の２倍と，半径が２倍，３倍となると弧の長さは円周の 1/2，1/3，…となることがわかり，等しい弧の長さは半径に反比例することが確認でき，中島（2015/1982）が挙げる３つの統合の分類のうち，集合による統合が起こっていたと考えられる。

次に，発展としてこの図形を経路と捉え，スタート地点を A，ゴール地点を B と指定した。そのことによって，半径が元の半円より大きい円弧は考えにくくなり，自然に半径が元の半円の 1/2 の円で考える生徒が多くなり，スタート地点とゴール地点を合わせるために２つの半円に分けて経路を作っていった。また，半径が 1/2 の半円２つと長さが等しいならば，さらに 1/2 にして，元の半円の 1/4 の半径の半円４つでも長さが等しいことを説明していた（図４）。

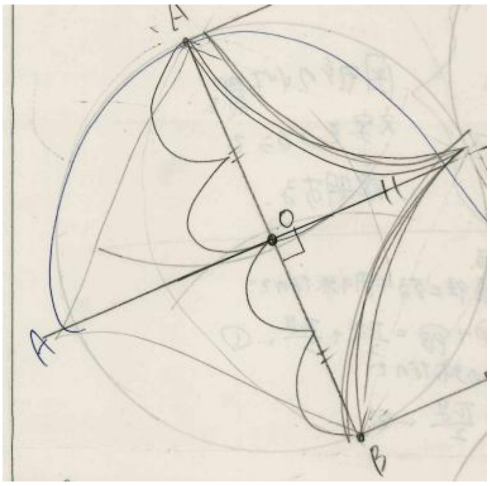

図４ 生徒のかいた図２

その後，生徒から，「それぞれの半円の半径が等しくなくてもいいのではないか」という発言から更に発展し，ＡＢ上の任意の点 P をおき，$\widehat{\mathrm{AP}}+\widehat{\mathrm{PB}}=\widehat{\mathrm{AB}}$ となることを，$\widehat{\mathrm{AP}}=x$，$\widehat{\mathrm{PB}}=y$として文字で説明する活動を行った。これらのことから，線分 AB を任意の位置，個数の点で区切った場合でも，同様の結果が得られることがわかった（図５）。このことは，３つの統合の分類のうち，拡張による統合が起こっていたと考えられる。

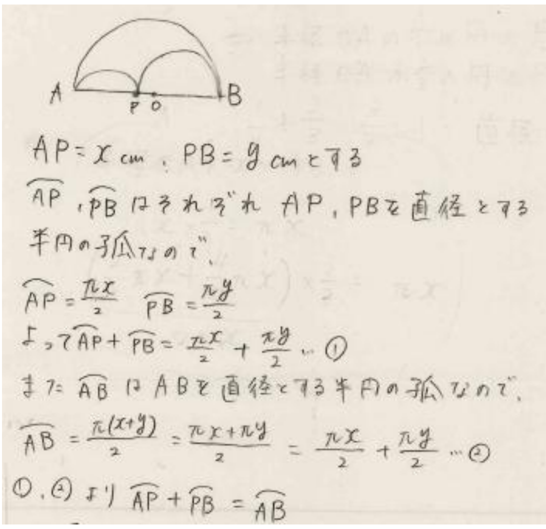

図 ５生徒の記述

授業の終末に，教師から「これで点Ｐがどの場所にあっても同じことが言えますか。」と問いかけると，ほぼ全員の生徒が納得してうなずいていた。しかし，教師からの「本当に？」という問い返しに，この性質が成り立たない点 P の場所があるのではないかと批判的に考える生徒が増えた。そして，「点Ｐが点Ａより左側や，点 B より右側にある場合」や，点 P が直線 AB 上にない，つまり，点Ｐが半円の内部や外部にある場合についてはいえないという発言が生徒からあらわれ，次時でそのことを取り扱うこととした。

(2) 第２時

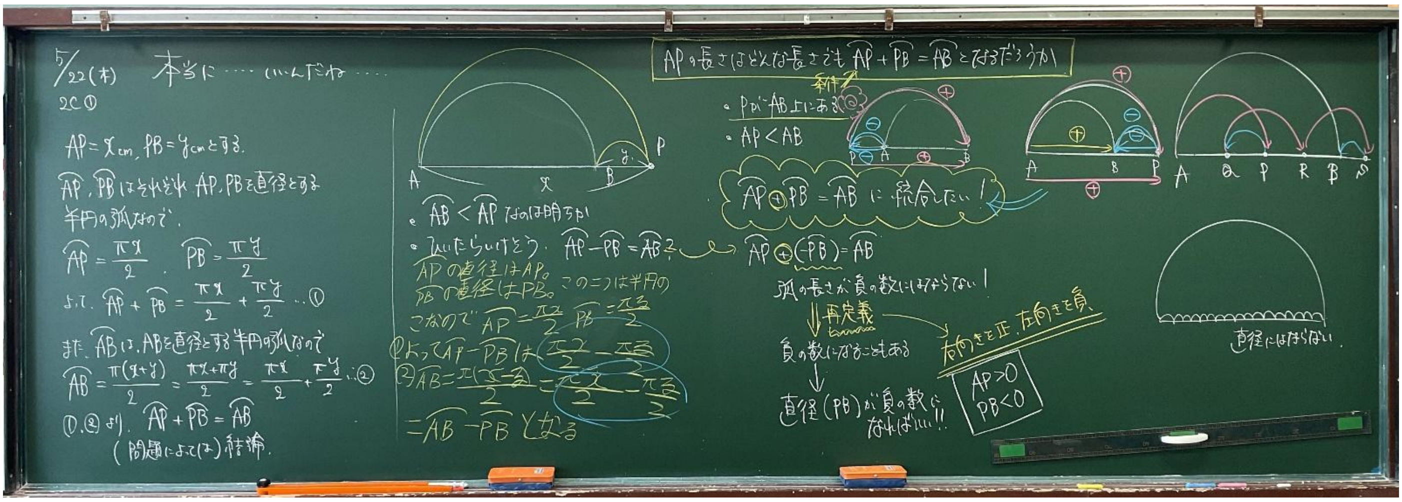

図６　第２時の板書

前時の場合について，テストも近かったことから説明する手順の書き方を改めて全体で確認した後に，更なる発展に挑戦した。②点が線分 AB 上にない場合の統合的な結論へと結びつく授業展開として，AP>AB, PB<AB つまり点Ｐが直線 AB 上でＢより右側にある図について考えることとした。生徒たちは左側に板書された場合を足掛かりに，$\mathrm{AB}=x-y$ とおいて$\widehat{\mathrm{AP}}-\widehat{\mathrm{PB}}=\widehat{\mathrm{AB}}$となることを文字で説明することができていた。それによって，直線 AB 上の任意の点Ｐについては，必ず２つの半円の弧の和によって求められるのではなく，場合によっては差によって求める必要があることが明らかになった。ここで生徒から，「加法の時と減法の時をまとめられないか」「減法になるときは向きが逆になる」「減法は加法に直すことができるからまとめて考えたい」など，更なる拡張による統合の可能性を感じさせる発言がみられた。そこで，

直線 AB 上に点Ｐがあるとき，AP はどんな長さでも$\widehat{\mathrm{AP}}+\widehat{\mathrm{PB}}=\widehat{\mathrm{AB}}$となるだろうか

という課題を設定し，小集団で追究を進めた。追究する中で，点Ｐが線分 AB 上にないときに減法を必要とすることに気づき，減法の引く数にあたる弧の向きが，右向きではなく左向きになることに言及する生徒が現れた。また，$\widehat{\mathrm{AP}}-\widehat{\mathrm{PB}}=\widehat{\mathrm{AB}}$を変形して，$\widehat{\mathrm{AP}}+\left(-\widehat{\mathrm{PB}}\right)=\widehat{\mathrm{AB}}$ とすれば加法で考えられ，そのために$\widehat{\mathrm{PB}}$が負の数になればいいと発言する生徒も現れた。これらの発言をまとめ，普段スカラー量として捉えている弧の長さを，向きをもつベクトル量として考えれば，弧の長さを負の数としても定義できることを全体で確認した。具体的には，PB が負の数になるよう，点Ａを始点，点Ｂを終点として右向きを正，左向きを負と再定義した。それによって，AP>0，PB<0，AB>0 となり，直線 AB 上の任意の点Ｐにおいて，$\widehat{\mathrm{AP}}+\widehat{\mathrm{PB}}=\widehat{\mathrm{AB}}$ となることを確かめられた。また，このことは点Ｐが線分 AB 上にあるときには AP>0, PB>0, AB>0 となり，矛盾が生じないことも確認した。これらの活動により，線分の長さの定義を拡張し，再定義することで，拡張による統合がみられた。

最後に，このことを繰り返せば，任意の個数の弧の和で表すことができることを確認した。図６右上の図のように，経路として点Ｐより後になる点Ｑが，点Ｐより左側にあっても，負の数をつかって線分を再定義したことによって，負の数の長さをもつ半円の弧を扱うことができるようになり，最終的に，$\widehat{\mathrm{AP}}+\widehat{\mathrm{PQ}}+\widehat{\mathrm{QR}}+\widehat{\mathrm{RS}}+\widehat{\mathrm{SB}}=\widehat{\mathrm{AB}}$となることを説明できた。

また，この経路をどんどん細分化していくと，始めの$\widehat{\mathrm{AB}}$よりも線分 AB に近づいていく（図６右下）ことから，生徒の中には，「最終的に線分 AB と等しくなるのではないか」と答える生徒も現れた。しかし，このことは$\widehat{\mathrm{AB}}=\mathrm{AB}$ となることを意味しており，「どんなに細分化しても AB と等しくなることはない。」という結論に達した。このことは，普段の授業実践で統合できる題材を多く取り扱っている生徒の中で驚きをもって迎えられたようであった。

３　参考文献

・池田敏和ほか(2025)．中学校数学２．学校図書
・中島健三（2015)．算数・数学教育と数学的な考え方とその進展のための考察（復刻版），東洋館出版社（原著出版 1982）